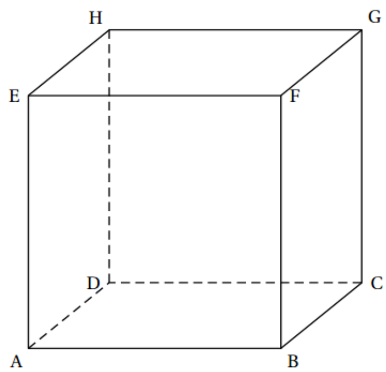
Produit scalaire dans l'espace

Exercice 1

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1 représenté ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Démontrer que la droite (ED) est orthogonale au plan (AGH).
2. On désigne par L le point de coordonnées $L\left(\frac{2}{3}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$.
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EL).
   (b) Soit K le point de coordonnées : $K\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
      i. Démontrer que K appartient au plan (AGH).
      ii. Démontrer que (LK) est parallèles à (ED).
      iii. En déduire que K est le projeté orthogonale de L sur (AGH).
   (c) Montrer que la distance du point L au plan (AGH) est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   (d) Déterminer le volume du tétraèdre LAGH.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

Exercice 2

Donner trois points et un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne :

$$3x - 2y + z - 1 = 0$$

Exercice 3

dans chacun des cas suivant, déterminer l'ensemble des points d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

1. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $3x - 2y + z - 1 = 0$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation paramétrique :
$$\mathcal{D} : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & 2-4t \\ z & = & 1-2t \end{array} \right. , t \in \mathbb{R}.$$
2. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $x - y + 2z = 4$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation paramétrique :
$$\mathcal{D} : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & 2-t \\ z & = & 1-t \end{array} \right. , t \in \mathbb{R}.$$
3. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x + z = 1$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation paramétrique :
$$\mathcal{D} : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2+t \\ y & = & 3t \\ z & = & -1-2t \end{array} \right. , t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4

Soit $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé.
Déterminez une équation cartésienne du plan (ABC) avec $A\,(1; -2; 3)$ et $B\,(2; 0; -5)$ et $C\,(1; 1; 1)$.

Exercice 5

Dans le repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace, on considère :

- les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations :
$$\mathcal{P} \ : \ x - y - z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' \ : \ x + y + 3z = 0.$$
- la droite $\mathcal{D}$ ayant pour représentation paramétrique :
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -3-2t \\ y & = & 2t \\ z & = & 1+2t \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquez si elle est vraie ou fausse, et justifiez votre réponse. Une justification est attendue pour chaque réponse.

Proposition 1
La droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
Proposition 2

La sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon 2 est tangente au plan $\mathcal{P}$.

Proposition 3

L'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1-t' \\ y & = & -1-2t' \\ z & = & t' \end{array}\right. \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Proposition 4

Les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont coplanaires.

Exercice 6

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4+t \\ y & = & 6+2t \\ z & = & 4-t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 8+5t' \\ y & = & 2-2t' \\ z & = & 6+t' \end{array}\right. , \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne

$$x - 2y - 5 = 0$$

1. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles coplanaires ?
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$ passant par le point $A(2; 5; 3)$ et contenant la droite$\mathcal{D}_1$.
3. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont-ils parallèles ?
4. Déterminer une équation paramétrique de l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$

Exercice 7

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(12\ ;\ 7\ ;\ -13)$ et $B(3\ ;\ 1\ ;\ 2)$ ainsi que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x + 2y - 5z = 1$.

le point B est-il le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

Exercice 8

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère la droite $\mathcal{D}$ dont on donne une représentation paramétrique, et le plan $\mathcal{P}$ dont on donne une équation cartésienne :

$$\mathcal{D}\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-2t \\ y & = & t \\ z & = & -5-4t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{P} : \quad 3x + 2y - z - 5 = 0.$$

Affirmation 1 : la droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère le point A(1 ; 9 ; 0) et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $4x - y - z + 3 = 0$.

   Affirmation 2 : la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Exercice 9

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :

$$\text{A}(1\ ;\ 2\ ;\ 7),\quad \text{B}(2\ ;\ 0\ ;\ 2),\quad \text{C}(3\ ;\ 1\ ;\ 3),\quad \text{D}(3\ ;\ -6\ ;\ 1)\ \text{et}\ \text{E}(4\ ;\ -8\ ;\ -4).$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit $\vec{u}(1\ ;\ b\ ;\ c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.
   (a) Déterminer les valeurs de b et c telles que $\vec{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).
   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :
   $x - 2y + z - 4 = 0$.
   (c) Le point D appartient-il au plan (ABC) ?
3. On considère la droite $\mathcal{D}$ de l'espace dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 2t+3 \\ y & = & -4t+5 \\ z & = & 2t-1 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

   (a) La droite $\mathcal{D}$ est-elle orthogonale au plan (ABC) ?
   (b) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC).
4. Etudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).

Exercice 10

Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
   On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (DF).
   (a) Donner les coordonnées des points D et F.
   (b) Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
   (d) Calculer les coordonnées du point H.
   (e) Démontrer que l'angle $\widehat{\text{EHG}}$ est un angle droit.

2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{\mathrm{D}M} = t\overrightarrow{\mathrm{DF}}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{E}M\mathrm{G}}$.
   Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.
   (a) Démontrer que $M\mathrm{E}^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.
   (b) Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
   En déduire que $M\mathrm{E}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
   (c) Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
   En déduire que α est maximale si et seulement si $M\mathrm{E}^2$ est minimal.
   (d) Conclure.

Exercice 11

Pour chaque question, donner la seule des quatre affirmations proposées qui est exacte. (justifier votre réponse)

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal, on considère les points A$(1\ ;\ -1\ ;\ -1)$, B$(1\,;\,1\,;\,1)$, C$(0\,;\,3\,;\,1)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - z + 5 = 0$.

Question 1
Soit $\mathcal{D}_1$ la droite de vecteureur directeur $\overrightarrow{u}(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ passant par A.
Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$ est :

a. $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+t\\ y &=& -1-t\\ z &=& 1-t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -1+2t\\ y &=& 1-t\\ z &=& 1+t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$

c. $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 5+4t\\ y &=& -3-2t\\ z &=& 1+2t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$ **d.** $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4-2t\\ y &=& -2+t\\ z &=& 3-4t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$

Question 2
Soit $\mathcal{D}_2$ la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+t\\ y &=& -3-t\\ z &=& 2-2t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$.

a. La droite $\mathcal{D}_2$ et le plan $\mathcal{P}$ ne sont pas sécants
b. La droite $\mathcal{D}_2$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
c. La droite $\mathcal{D}_2$ et le plan $\mathcal{P}$ se coupent au point E$\left(\dfrac{1}{3}\ ;\ -\dfrac{7}{3}\ ;\ \dfrac{10}{3}\right)$.
d. La droite $\mathcal{D}_2$ et le plan $\mathcal{P}$ se coupent au point F$\left(\dfrac{4}{3}\ ;\ -\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{22}{3}\right)$.

Question 3
a. L'intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan (ABC) est réduite à un point.
b. Le plan $\mathcal{P}$ et le plan (ABC) sont confondus.
c. Le plan $\mathcal{P}$ coupe le plan (ABC) selon une droite.
d. Le plan $\mathcal{P}$ et le plan (ABC) sont strictement parallèles.

Question 4

Une mesure de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ arrondie au dixième de degré est égale à :

a. 22,2 $^\circ$ **b.** 0,4 $^\circ$ **c.** 67,8 $^\circ$ **d.** 1,2 $^\circ$

Exercice 12

On considère un cube ABCDEFGH. L'espace est rapporté au repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation

$$x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0$$

Construire, sur la figure ci-dessous, la section du cube par le plan $\mathcal{P}$

La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.