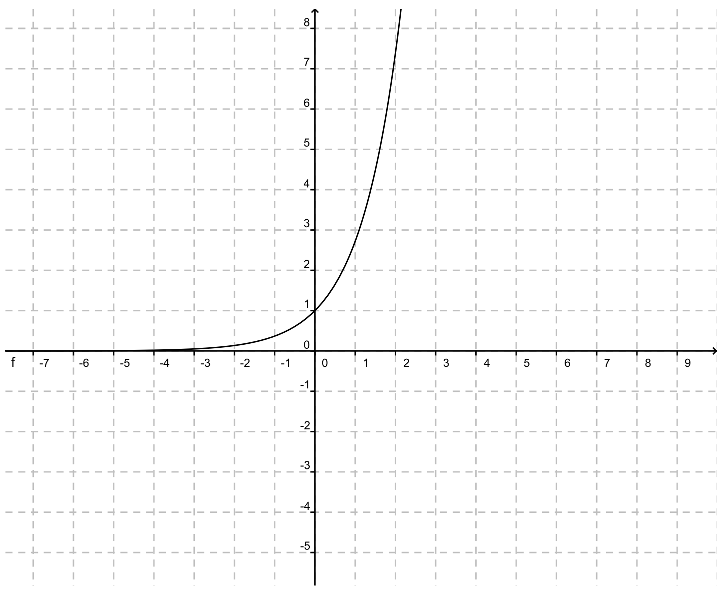
Fonction logarithme

Exercice 1

Approche de la représentation graphique de la fonction ln

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction exponentielle.



1. Faire apparaitre sur cette courbe l'antécédent de 3 par la fonction exponentielle. On notera ce nombre $\ln(3)$
2. Tracer la droite d'équation $y = x$ et en déduire la position du point de coordonnées $(3, \ln(3))$.
3. En suivant la même démarche, placer les points suivant :
$(2, \ln(2))$, $(4, \ln(4))$, $(5, \ln(5))$, $(6, \ln(6))$, $(7, \ln(7))$, $(1, \ln(1))$
4. Relier les points obtenus par une courbe aussi régulière que possible
5. Que remarque t-on concernant les deux courbes tracées ?

Exercice 2

1. Donner le tableau de variation de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ et tracer cette fonction sur votre calculatrice.
2. Justifier que $e^x = 2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
3. On note $\ln(2)$ cette solution. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $\ln(2)$.
4. Pour quelles valeurs de a peut-on ainsi définir $\ln(a)$?

5. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $\ln(3)$, $\ln(6)$, $\ln(8)$, $\ln(2,71828)$, $\ln(e^2)$, $\ln(e^4)$
6. Conjecturer une relation entre $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(6)$, puis entre $\ln(2)$, $\ln(8)$.

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

1. $e^x = 4$
2. $5e^x + 2 = 8$
3. $e^{2x} - 2 = 0$
4. $e^x - 3 = 2e^x - 1$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes après avoir déterminer l'ensemble de définition.

1. $\ln(x+2) = \ln(2)$
2. $\ln(2x-5) = 1$
3. $4\ln(1-x) = 8$
4. $\ln(3x+8) = \ln(x)$

Exercice 5

Résoudre les équations suivantes après avoir déterminer l'ensemble de définition.

1. $\ln(x^2+1) = \ln(x)$
2. $\ln(3-x) \times \ln(x+1) = 0$
3. $\ln(5x-6) - 2\ln(x) = 0$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(e^x+1) = \ln(2)$
2. $\ln(2e^x+1) = 1$
3. $e^{1+\ln x} = 2x - 1$
4. $e^{2\ln x - 3} = x$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{x+2} = 3$
2. $4e^{2x-1} = 1$

Exercice 8

Simplifier de tête les expressions suivantes :

1. $\dfrac{e^{\ln(8)}}{e^{3\ln(2)}}$
2. $\ln(3) + \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$
3. $\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + \ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$

Etudier l'ensemble de définition et le signe de chacune des expressions suivantes :

1. $x(\ln(x) - 1)$
2. $\dfrac{x}{\ln(x) - 1}$
3. $\ln(x)(1 - \ln(x))$
4. $\dfrac{1 - \ln(x)}{1 + \ln(x)}$

Exercice 9

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(x+2) \leq 2\ln(x)$
2. $\ln(x)(\ln(x) - 2) \leq 0$
3. $\ln(x - 13) \geq 2\ln(x+3)$
4. $(\ln(x))^2 - \ln(x) - 6 > 0$

Exercice 10

Calculer dans chaque cas la dérivée de la fonction f suivante.

1. $f(x) = x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$
2. $f(x) = (2x-3)^6$ sur $\mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
4. $f(x) = e^{x^2-1}$ sur $\mathbb{R}$
5. $f(x) = (\ln(x))^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$
6. $f(x) = \dfrac{2x-3}{e^{-x+1}}$ sur $\mathbb{R}$
7. $f(x) = 2x^2 - 1 - \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$
8. $f(x) = \sqrt{5x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 11

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 \ln(x) + x$$

1. Déterminer en quel point de la courbe représentative de g, la tangente a pour coefficient directeur 1.
2. Déterminer en quel point de la courbe représentative de g, la tangente passe par l'origine du repère.

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé

1. Tracer sur une calculatrice les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations respectives $y = \ln(x)$ et $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Etude des tangentes en un point particulier.
   (a) Déterminer le point d'intersection A de ces deux courbes.
   (b) On veut montrer que les tangentes en A aux deux courbes sont perpendiculaires.
      i. Donner les équations des tangentes en A aux deux courbes
      ii. Donner un vecteur normal a chacune de ces tangentes.
      iii. Démontrer que ces deux tangentes sont perpendiculaire.
3. Généralisation Soient m un réel strictement positif et $M_1 \in \mathcal{C}_1$ et $M_2 \in \mathcal{C}_2$ deux points d'abscisse respective m et $\frac{1}{m}$. On veut montrer que la tangentes en M_1 à $\mathcal{C}_1$ est perpendiculaire à la tangente en M_2 à $\mathcal{C}_2$.
   (a) Donner les équations des tangentes en M_1 à $\mathcal{C}_1$ et en M_2 à $\mathcal{C}_2$.
   (b) Donner un vecteur normal a chacune de ces tangentes.
   (c) Démontrer que ces deux tangentes sont perpendiculaires.

Exercice 13

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - 3X + 2 = 0$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :
   (a) $(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$
   (b) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

Exercice 14

Calculer dans chaque cas la dérivée de la fonction f suivante.

1. $f(x) = x\ln(x^2)$ sur $\mathbb{R}^*$
2. $f(x) = (2\ln(x) - 3)^6$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3. $f(x) = \dfrac{\ln(x) + 1}{2x + 3}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

4. $f(x) = e^{\sqrt{x}} + 1$ sur $\mathbb{R}_+$
5. $f(x) = (\ln(2x-3))$ sur $]\frac{3}{2}, +\infty[$
6. $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 15

Croissances comparées

1. On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$.
   (a) Etudier les variations de f sur $[1; +\infty[$ et en déduire que
   $$\forall x \in [1; +\infty[, \quad 0 \leq \ln(x) \leq \sqrt{x}$$
   (b) En déduire que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$.
3. En effectuant le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \mapsto 0} x^n \ln(x) = 0$.

Exercice 16

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,; +\infty[$ par :
$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$$

1. Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,; +\infty[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,; +\infty[$ par :
$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O\,; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O\,; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

5. Etudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = 2x$.

Exercice 17

Partie A : établir une inégalité

Sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[, \quad \ln(x+1) \leqslant x$.

Partie B : application à l'étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n)$. On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2.
2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, \quad u_n \geqslant 0$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel $n, \quad u_n \leqslant 1$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que $\ell = f(\ell)$, où f est la fonction définie dans la **partie A**. En déduire la valeur de ℓ.
4. (a) Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p}.
   (b) Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15}.

Exercice 18

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par

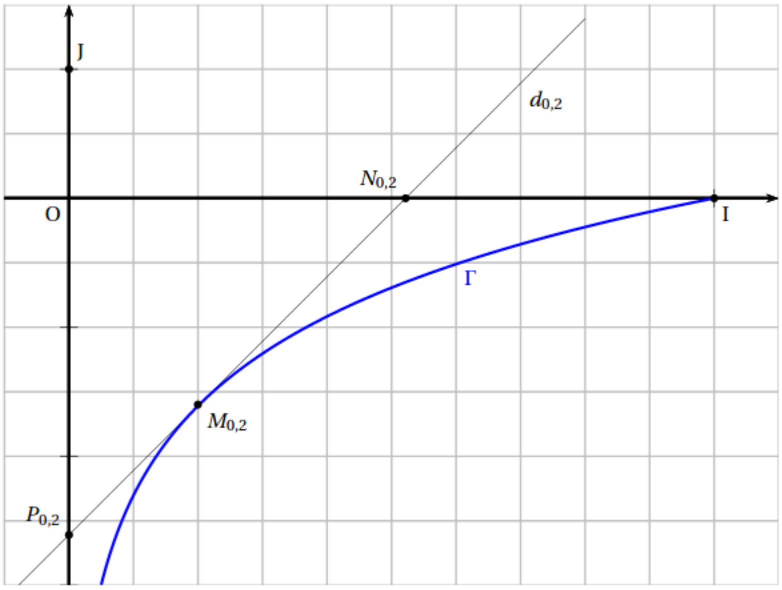
$$f(x) = x(1 - \ln x)^2.$$

   (a) Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0\ ;\ 1]$, $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $g(x) = \ln x$. Soit a un réel de l'intervalle $]0\,;\,1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a .

On s'intéresse à l'aire du triangle $\mathrm{O}N_aP_a$ quand le réel a varie dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

1. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0,2$ et on donne la figure ci-dessous.



(a) Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle O$N_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.

(b) Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

(c) Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle O$N_{0,2}P_{0,2}$.

Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0\,;\,1]$, l'aire du triangle ON_aP_a en unités d'aire est donnée par $\mathcal{A}(a) = \dfrac{1}{2}a(1-\ln a)^2$.

2. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathcal{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.