Fonction logarithme

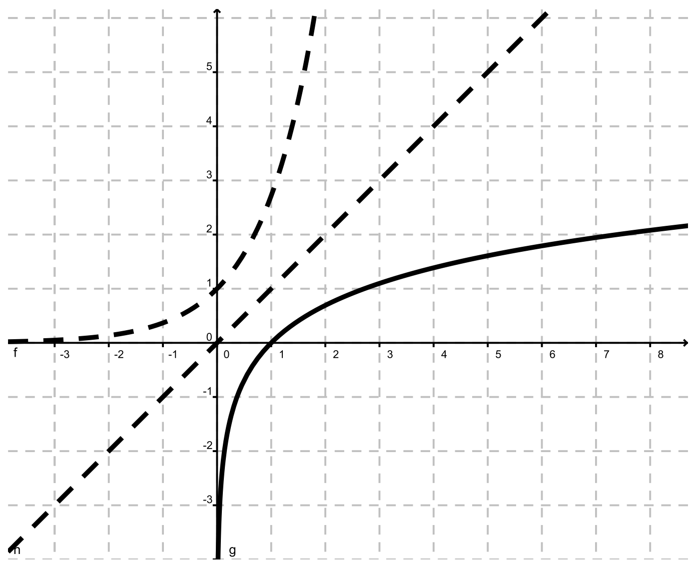
I Fonction logarithme

Remarque

On sait que la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on montre que pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une unique valeur x tel que $y = e^x$. Cette valeur, noté $\ln(x)$, est appelé logarithme népérien de x.

Définition

La fonction logarithme népérien, noté ln, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Elle associe à tout nombre réel x strictement positif le nombre y tel que $e = \mathrm{e}^y$, dont l'image par la fonction exponentielle est x. On note ce nombre $\ln(x)$



Remarque

les courbes représentatives de la fonction exponentielle et de la fonction ln sont symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Remarque

1. $e^0 = 1$, donc $\ln(1) = 0$
2. $e^1 = e$, donc $\ln(e) = 1$

Propriétés

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0, +\infty[$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y = \ln(x) \Longleftrightarrow x = e^y$.

Démonstration

1 Propriétés algébriques

Propriété

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Exemple

Démonstration

Propriétés

On déduit de la propriété qui précède :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

Démonstration

II Etude de la fonction ln

On admet que la fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété

La dérivée de la fonction ln est la fonction inverse.
C'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

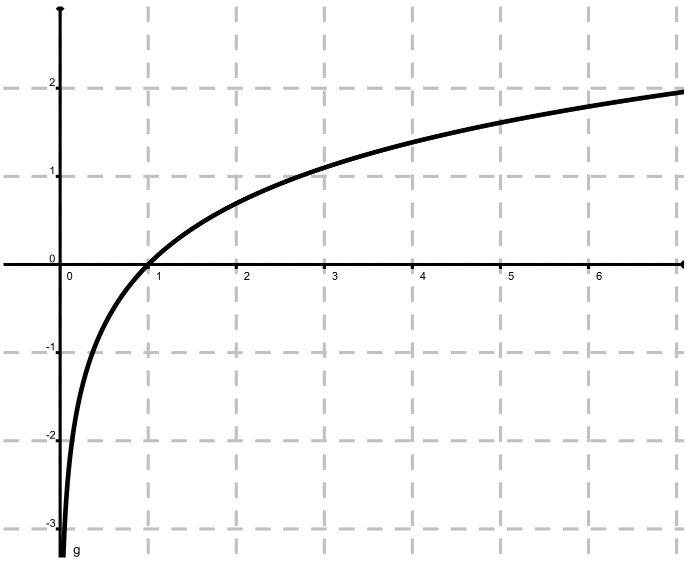
Démonstration

Propriété

La fonction logarithme népérien est strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$



Démonstration

III Croissances comparées et dérivée de fonction composée

Propriétés

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x \to 0} (x \ln(x)) = 0$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Démonstration

Propriété

Soit u une fonction définie, continue et dérivable sur in intervalle I et a valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $f : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I a pour dérivée la fonction f' définie par :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple

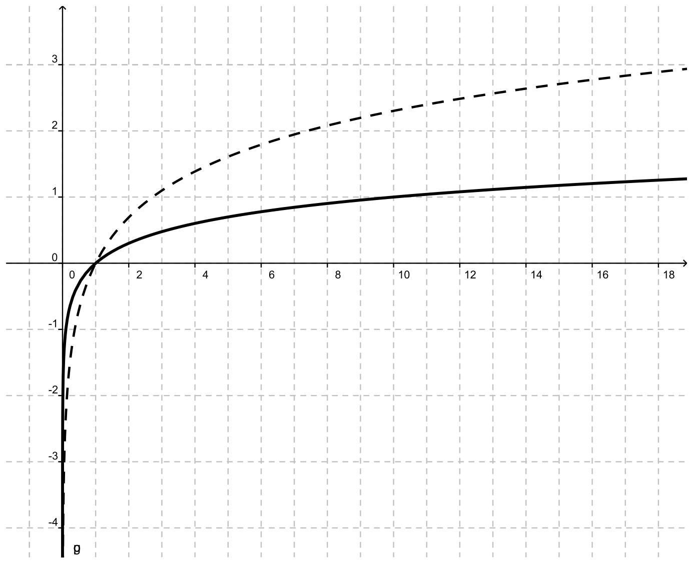
Démonstration

IV Logarithme décimal

Définition

La fonction **logarithme décimal**, noté log, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$


3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
g