Première DS4
Correction

Exercice 1 :

Voir cours.

Exercice 2

$f(1) = -2$, $f'(1) = 0$

$f(2) = 0$ et $f'(2) = \dfrac{0-(-5)}{2-1} = 5$

Exercice 3

① $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2x+2$, $u'(x) = 2$

$v(x) = x^2+1$, $v'(x) = 2x$

donc

$$f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$= \frac{2(x^2+1) - (2x+2).2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2-4x^2-4x}{(x^2+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-2x^2-4x+2}{(x^2+1)^2}}$$

② l'équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ est :

$$y = f'(0).(x-0) + f(0)$$

avec $f'(0) = 2$ et $f(0) = 2$

d'où :

$$\boxed{T_0 : \quad y = 2x+2}$$

③ a) Soit Δ le discriminant de $-2a^2-4a+2$

$$\Delta = (-4)^2 - 4\times(-2)\times 2$$
$$= 16+16$$
$$= 32$$

$\Delta > 0$ donc l'équation $-2a^2-4a+2=0$ a deux solutions qui sont :

$$a_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{32}}{2\times(-2)} = \frac{4+4\sqrt{2}}{-4} = \boxed{-1-\sqrt{2}}$$

$$a_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{32}}{2\times(-2)} = \frac{4-4\sqrt{2}}{-4} = \boxed{-1+\sqrt{2}}$$

b) D'après la question précédente on a le tableau de signe suivant :

a	$-\infty$		a_1		a_2		$+\infty$
$-2a^2-4a+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(a^2+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(a)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le signe du coefficient directeur de T_a est donc :

- Strictement négatif pour $a \in]-\infty ; a_1[\cup]a_2 ; +\infty[$
- Strictement positif pour $a \in]a_1 ; a_2[$
- Nul pour $a = a_1$ et $a = a_2$

Exercice 4

① $u_0 = 6$ $\quad v_0 = 2$

$u_1 = \frac{1}{3}\times 6 + 2 = 4$ $\quad v_1 = -\frac{4}{3}\times 6 + 3\times 2 = -2$

$u_2 = \frac{1}{3}\times 4 - 2 = -\frac{2}{3}$ $\quad v_2 = -\frac{4}{3}\times 4 + 3\times(-2) = \frac{-34}{3}$

② a) $w_0 = 2u_0 - v_0 = 2\times 6 - 2 = 10$

$w_1 = 2u_1 - v_1 = 2\times 4 - (-2) = 10$

$w_2 = 2u_2 - v_2 = 2\times\left(\frac{-2}{3}\right) - \left(\frac{-34}{3}\right) = \frac{-4+34}{3} = \frac{30}{3} = 10$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= 2u_{n+1} - v_{n+1} \\ &= 2\left(\frac{1}{3}u_n + v_n\right) - \left(-\frac{4}{3}u_n + 3v_n\right) \\ &= \frac{2}{3}u_n + 2v_n - \left(\frac{-4}{3}\right)u_n - 3v_n \\ &= \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}u_n + 2v_n - 3v_n \\ &= 2u_n - v_n \\ &\boxed{= w_n} \end{aligned}$$

c) D'après la question précédente, la suite w est une suite constante et par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$

on a $w_n = w_0$

donc $\boxed{w_n = 10 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

③ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 10$ et $w_n = 2u_n - v_n$,

donc $10 = 2u_n - v_n$

d'où $v_n + 10 = 2u_n$

donc $\boxed{v_n = 2u_n - 10}$

④ Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + v_n$$

or $v_n = 2u_n - 10$

donc $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 2u_n - 10$

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + \frac{6}{3} u_n - 10$$

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{7}{3} u_n - 10}$$

Exercice 5

① a) $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 + u_n - 3 - u_n$

$$= -u_n^2 - 3$$

b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \geq 0$, donc $-u_n^2 \leq 0$

d'où $-u_n^2 - 3 \leq -3 < 0$

donc $u_{n+1} - u_n < 0$

La suite u est donc <u>strictement décroissante</u>.

② a) $v_{n+1} - v_n = 3(n+1)^2 - 2(n+1) - 1 - (3n^2 - 2n - 1)$

$$= 3(n^2 + 2n + 1) \cancel{-2n} - 2 \cancel{-1} - 3n^2 \cancel{+2n} \cancel{+1}$$

$$= \cancel{3n^2} + 6n + 3 - 2 \cancel{-3n^2}$$

$$\boxed{= 6n + 1}$$

b) n étant un entier naturel, on a $n \geq 0$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n > 0$

La suite v est donc strictement croissante.