Spé. maths : DS 6
Correction

Exercice 1

1 - a) f est définie et dérivable sur $[0;1]$ en tant que fonction polynome et on a pour tout $x \in [0,1]$

$$f'(x) = 1,9 \times (1-x) + 1,9x \times (-1)$$

$$\boxed{f'(x) = 1,9 - 3,8x}$$

Alors $f'(x) \geqslant 0 \iff 1,9 - 3,8x \geqslant 0$

$$\iff 1,9 \geqslant 3,8x$$

$$\iff \frac{1}{2} \geqslant x$$

et $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

d'où le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$0,475$	$\searrow$	0

b) D'après le tableau de variation
$\forall x \in [0,1]$, $\boxed{f(x) \in [0;1]}$

2 a) D'après le graphique de l'énoncé, la suite (u_n) semble <u>croissante</u> et avoir pour <u>limite</u> $\frac{1}{2}$.

3 a) <u>Hérédité</u>

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

f étant croissante sur $[0;\frac{1}{2}]$, on a :

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\tfrac{1}{2})$$

donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0,475$

d'où $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{2}$

d'où l'hérédité.

Initialisation :

$u_0 = 0,1$ et $u_1 = f(u_0) = 1,9 \times 0,1\,(1-0,1) = 0,171$

donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2}$

d'où l'initialisation

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

b) D'après la question précédente, (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$, elle est donc convergente.

c) Soit $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de (u_n)

f étant continue, d'après le théorème du point fixe

$f(\ell) = \ell$

d'où $1,9\,\ell\,(1-\ell) = \ell$

$u_0 = 0,1$ et (u_n) est croissante donc $\ell \neq 0$

par conséquent $1,9\,(1-\ell) = 1$

$-1,9\,\ell = -0,9$

$\ell = \frac{0,9}{1,9}$

Donc $\boxed{\ell = \frac{9}{19} \simeq 0,47}$

Exercice 2

PARTIE A

(1) p est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et on a :

$$p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$$

Soit Δ le discriminant de $3x^2-6x+5$

$$\Delta = (-6)^2 - 4\times3\times5 = 36 - 60 = -24$$

$\Delta < 0$ donc l'équation $3x^2-6x+5=0$ n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p'(x) > 0$

$\boxed{\text{p est donc strictement croissante sur } \mathbb{R}}$

(2) • P est continue sur $\mathbb{R}$ et donc continue sur $[-3;4]$

• P est strictement croissante sur $[-3;4]$ d'après la question précédente.

• $P(-3) = (-3)^3 - 3\times(-3)^2 + 5\times(-3) + 1 = -68 < 0$

$P(4) = 4^3 - 3\times4^2 + 5\times4 + 1 = 37 > 0$

donc $0 \in p([-3;4])$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $p(x)=0$ a une unique solution sur $[-3;4]$

(3) A la calculatrice, on obtient $\alpha \simeq$ ...

(4) D'après les questions précédentes :

$$\begin{cases} \bullet\ \forall x \in [-3;\alpha[,\ p(x) < 0 \\ \bullet\ p(\alpha) = 0 \\ \bullet\ \forall x \in]\alpha;4],\ p(x) > 0 \end{cases}$$

PARTIE B

(1) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \neq 0$ donc f est définie et dérivable sur $[-3;4]$ en tant que quotient de fonctions dérivables.

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (1+x^2) - e^x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{e^x (x^2 - 2x + 1)}{(1+x^2)^2}$$

b) $f'(1) = \dfrac{e(1^2 - 2\times 1 + 1)}{(1+1^2)^2} = 0$

Donc $\mathcal{C}_g$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

(2) D'après le graphique, $\mathcal{C}_g$ semble convexe avant le point d'abscisse 0, concave entre le point d'abscisse 0 et celui d'abscisse 1 et convexe après le point d'abscisse 1. Elle semble donc avoir 2 points d'inflexions.
Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

(3) $p(1) = 1^3 - 3\times 1^2 + 5\times 1 + 1 = 4$. donc $p(1) > 0$
et par conséquent $\alpha < 1$
d'où le tableau suivant :

x	-3		α		1		4
e^x		$+$		$+$		$+$	
$(x^2+1)^3$		$+$		$+$		$+$	
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc, d'après le tableau, $\mathcal{C}_g$ a deux points d'inflexion, donc le toboggan assure de bonnes sensations.