DS 4

Terminale Maths expert

Correction

Exercice 1

① - a) Soit d un diviseur commun positif à 165 et 324

$d | 165$ et $d | 324$ donc $d | 2 \times 165 - 324$

par conséquent $d | 6$

d'où $\boxed{d \in \{1 ; 2 ; 3 ; 6\}}$

b) Réciproquement

- $1 | 165$ et $1 | 324$
- 2 ne divise pas 165, d'où 6 ne divise pas non plus 165
- $165 = 3 \times 55$ et $324 = 3 \times 108$

  donc $3 | 165$ et $3 | 324$

Donc l'ensemble des diviseurs communs à 165 et 325

est $\boxed{\{-3 ; -1 ; 1 ; 3\}}$

② a) Supposons que $3n+2 | 5n+1$

on a donc

$3n+2 \mid 5 \times (3n+2) - 3(5n+1)$

d'où $3n+2 | 7$

par conséquent $3n+2 \in \{-7 ; -1 ; 1 ; 7\}$

De plus

$$3n+2 = -7 \iff 3n = -9$$

$$3n+2 = -1 \iff 3n = -3$$

$$3n+2 = 1 \iff 3n = -1$$

$$3n+2 = 7 \iff 3n = 5$$

Donc $\boxed{\text{si } 3n+2 \mid 5n+1, \text{ alors } 3n \in \{-9 ; -3 ; -1 ; 5\}}$

b) Réciproquement

- $3n = -9 \iff n = -3$

  et $\dfrac{5\times(-3)+1}{3\times(-3)+2} = \dfrac{-14}{7} = -2$

- $3n = -3 \iff n = -1$

  et $\dfrac{5\times(-1)+1}{3\times(-1)+2} = \dfrac{-4}{-1} = 4$

- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $3n \neq -1$ et $3n \neq 5$

Donc $\boxed{\dfrac{5n+1}{3n+2} \in \mathbb{Z} \text{ si et seulement si } n \in \{-3;-1\}}$

Exercice 2

① On note r_n le reste de la division de 10^n par 7.

- $10^0 \equiv 1\ [7]$ donc $r_0 = 1$
- $10 \equiv 3\ [7]$ car $10 = 7+3$ et $0 \leq 3 < 7$

  donc $r_1 = 3$
- $10^2 \equiv 3^2\ [7]$ et $9 \equiv 2\ [7]$ car $9 = 7+2$ et $0 \leq 2 < 7$

  donc $r_2 = 2$
- $10^3 \equiv 2\times 3\ [7]$ donc $10^3 \equiv 6\ [7]$, et $0 \leq 6 < 7$

  donc $r_3 = 6$
- $10^4 \equiv 2^2\ [7]$ donc $10^4 \equiv 4\ [7]$, et $0 \leq 4 < 7$

  donc $r_4 = 4$
- $10^5 \equiv 3\times 4\ [7]$ et $12 \equiv 5\ [7]$ car $12 = 7+5$

  et $0 \leq 5 < 7$ donc $r_5 = 5$
- $10^6 \equiv 4\times 2\ [7]$ et $8 \equiv 1\ [7]$ car $8 = 7+1$

  et $0 \leq 1 < 7$ donc $r_6 = 1$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} 10^{6n} \equiv 1\ [7] \\ 10^{6n+1} \equiv 3\ [7] \\ 10^{6n+2} \equiv 2\ [7] \\ 10^{6n+3} \equiv 6\ [7] \\ 10^{6n+4} \equiv 4\ [7] \\ 10^{6n+5} \equiv 5\ [7] \end{cases}$$

② $2025 = 2\times 10^3 + 2\times 10 + 5$

donc, d'après la question 1

$2025 \equiv 2\times 6 + 2\times 3 + 5\ [7]$

$2025 \equiv 23\ [7]$

or $23 \equiv 2\ [7]$ car $23 = 3\times 7 + 2$

donc $\boxed{2025 \equiv 2\ [7]}$

③ $2025 = 6\times 337 + 3$

donc $2025 \equiv 3\ [6]$

④ $2025 \equiv 2\ [7]$

donc $2025^{2025} \equiv 2^{2025}\ [7]$

or $2^2 \equiv 4\ [7]$

$2^3 \equiv 1\ [7]$ car $2^3 = 7+1$

et $2025 = 3\times 675$

Donc $2025^{2025} \equiv 2^{2025}\ [7]$

$2025^{2025} \equiv (2^3)^{675}\ [7]$

$2025^{2025} \equiv 1^{675}\ [7]$

donc $2025^{2025} \equiv 1\ [7]$, or $0 \leq 1 < 7$

$\boxed{\text{donc le reste de la division euclidienne de } 2025^{2025} \text{ par 7 est 1}}$

Exercice 3

(1) $365 = 52 \times 7 + 1$ et $0 \leq 1 < 7$

$\boxed{\text{donc le reste de la division euclidienne de 365 par 7 est 1}}$

(2) $97 = 4 \times 24 + 1$ et toutes les années après 1901 sont bissextiles donc Marcelle a connue 24 années 24 années bissextiles

(3) Le nombre de jours vécu par Marcelle est

$97 \times 365 + 24$

or $365 \equiv 1\ [7]$ et $97 \times 1 + 24 = 121$

or $121 = 7 \times 17 + 2$

donc $97 \times 365 + 24 \equiv 2\ [7]$

Sachant qu'aujourd'hui, nous somme lundi, on peut conclure que Marcelle est ne un $\boxed{\text{Samedi}}$

Exercice 4

(1) $a = bq + r$ et $a = bq' + r'$

donc $bq + r = bq' + r'$

d'où $r - r' = b(q' - q)$

donc $\boxed{b \mid r - r'}$

(2) $0 \leq r < b$ et $0 \leq r' < b$

donc $0 \leq r < b$ et $-b < -r' \leq 0$

d'où, par somme

$$\boxed{-b < r - r' < b}$$

(3) $r-r'$ est un multiple de b et $-b < r-r' < b$
or le seul multiple de b compris au sens stricte entre $-b$ et b est 0

Donc $r-r' = 0$

D'ou $\boxed{r = r'}$

(4) $r-r' = 0$ donc $b(q'-q) = 0$

or $b \neq 0$ donc $q'-q = 0$

et par consequent $\boxed{q = q'}$