Premiere - DS 4 (Fonctions dérivées et suites)

2023-2024

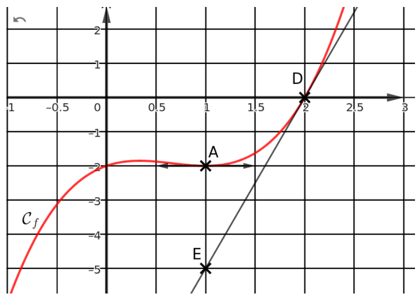
Exercice 1 **6 points**

Compléter les deux tableaux de l'annexe 1

Exercice 2 **2 points**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci contre :
Sur le graphique est tracé la tangente au point d'abscisse 0.
Donner des valeurs approchées de :

- $f(0)$
- $f'(0)$
- $f(1)$
- $f'(1)$



Exercice 3 **8 points**

Soit f la fonction définie ci-dessous :

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{2x+2}{x^2+1} \end{array}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que pour tout réel x, on a :
   $$f'(x) = \frac{-2x^2-4x+2}{\left(x^2+1\right)^2}$$
2. En déduire l'équation de la tangente T_0 a $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Soit a un réel.
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2a^2-4a+2=0$.
   (b) En déduire le signe du coefficient directeur de la tangente T_a à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.
   (c) Existe-t-il une tangente à $\mathcal{C}_f$ qui soit parallèle à la droite Δ d'équation $y=0$. Si oui, donner le ou les les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ pour lequel ou lesquels la tangente est parallèle à Δ.

Exercice 4 — **8 points**

Soit u et v les suites définies par $u_0 = 6$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = -\frac{4}{3}u_n + 3v_n$$

1. Déterminer les 3 premiers termes de chacune des deux suites u et v.
2. Soit w la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 2u_n - v_n$.
   (a) Donner les 3 premiers termes de cette (w_n).
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $w_{n+1} = w_n$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 10$
3. Déduire de la question précédente que pour tout entier naturel n, on a :

$$v_n = 2u_n - 10$$

4. En déduire u_{n+1} en fonction de u_n.

Exercice 5 — **6 points**

Soit u et v les suites définies par $u_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = -u_n^2 + u_n - 3 \qquad \text{et} \qquad v_n = 3n^2 - 2n - 1$$

1. Etude de la suite u.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, Calculer $u_{n+1} - u_n$.
   (b) En déduire les variations de la suite u.
2. Etude de la suite v.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, Calculer $v_{n+1} - v_n$.
   (b) En déduire les variations$<$ de la suite v.

Annexe 1

Nom : .... Classe : ....

Prénom : ....

Soit a et b deux réels et n un entier naturel non nul.

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée	ensemble de dérivabilité
$f(x) = b$		$f'(x) =$	
$f(x) = ax + b$			
$f(x) = x^2$			
$f(x) = x^3$			
$f(x) = x^n$			
$f(x) = \sqrt{x}$			
$f(x) = \dfrac{1}{x}$			

Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I et (a, b) un couple de réels.
La fonction f définie dans le tableau suivant est dérivable sur I dans tout les cas suivants :

Fonction	Dérivée
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) =$
$f(x) = a \times u(x)$	
$f(x) = u(x) \times v(x)$	
$f(x) = \dfrac{1}{v(x)}$	
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	