TS - DS 6 du 11 novembre

2023-2024

Exercice 1 **Suites**

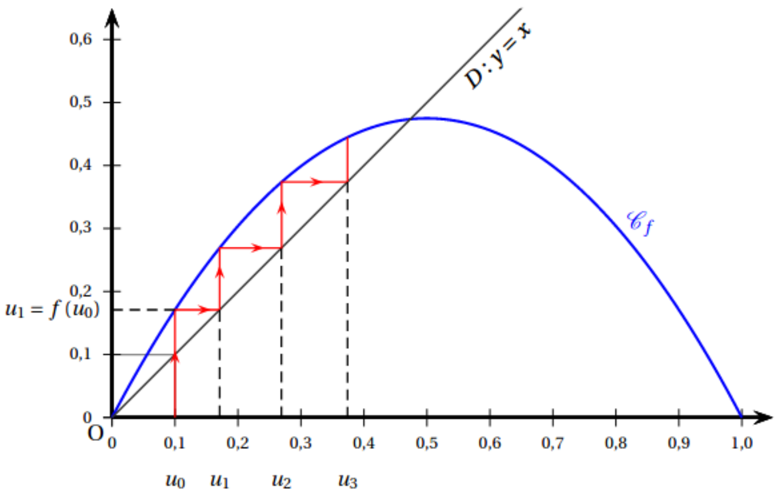
Soit k un nombre réel.
On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = ku_n\left(1 - u_n\right).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k.

Dans cette partie, $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$.
On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,9u_n\left(1 - u_n\right)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.
   (a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   (b) En déduire que si $x \in [0\ ;\ 1]$ alors $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.
2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.
   Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3. (a) En utilisant les résultats de la question 1, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

   (b) En déduire que la suite (u_n) converge.
   (c) Déterminer sa limite.

Exercice 2 **Thème : fonctions, fonction exponentielle, convexité**

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ une unique solution qui sera notée α.
3. Déterminer une valeur arrondie du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

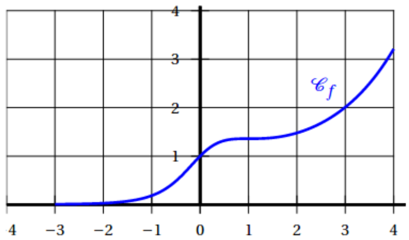
Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

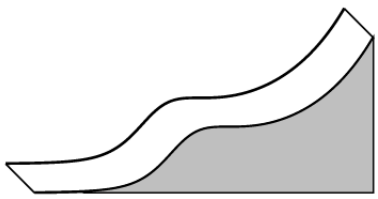
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + x^2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. (a) Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
   (b) Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$


Vue de profil du toboggan

   (a) D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.
   (b) On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^3}$$

   où p est la fonction définie dans la partie A.
   En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.