Dénombrement

Exercice 1

On considère les ensembles $A = \{7; 8; 14; 21\}$ et $B = \{5; 16; 14; 25; 123\}$
Donner les éléments de $A \cap B$ et ceux de $A \cup B$

Exercice 2

oient A et B deux ensembles tels que $\text{card}(A) = 15$, $\text{card}(B) = 7$
Donner $\text{card}(A \cup B)$ et $\text{card}(A \times B)$ dans les deux cas suivants :

1. Si A et B sont disjoints
2. Si $\text{card}(A \cap B) = 3$

Exercice 3

'adresse IP est un numéro qui identifie chaque ordinateur connecté à internet.
Une adresse de type IPv4 est composée de quatre nombres compris entre 0 et 255 inclus.

1. Est-ce suffisant pour identifier 5 milliards d'ordinateur de manière unique ?
2. De nouvelle adresse, de type IPv6, utilisant 6 nombres compris entre 0 et 255 inclus ont été creée. Combien d'adresse IPv6 existe-t-il ?

Exercice 4

On construit des nombres à n chiffres en utilisant uniquement les chiffres 1,2,3 et 4. On souhaite construire au moins 1000 nombres différents.

1. Cette contrainte est-elle respectée lorsque $n = 2$? lorsque $n = 3$?
2. Déterminer la valeur minimale de n pour respectée la contrainte de l'énoncé.

Exercice 5

Dans une association sportive de 84 membres, 60 personnes font du football et 42 font du basket-ball.
Combien pratique les deux sport sachant que tout le monde en pratique au moins un ?

Exercice 6

Soient A et B deux ensembles.
On appelle différence symétrique de A et B l'ensemble noté $A\Delta B$ défini par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1. Avec un diagramme, représenté les ensembles A et B et y hachurer la zone correspondant à $A\Delta B$.
2. Montrer que :
$$\mathrm{card}(A\Delta B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - 2\,\mathrm{card}(A \cap B)$$

Exercice 7

Soient A et B deux ensembles finis et disjoints. On sait que $\mathrm{card}(A \cup B) = 23$ et $\mathrm{card}(A \times B) = 132$.
Déterminer $\mathrm{card}(A)$ et $\mathrm{card}(B)$ sachant que $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(B)$

Exercice 8

Un restaurant propose quatre entrées, deux plats et trois desserts. Trois menus sont proposés : un menu entrée-plat-dessert, un entrée-plat et un plat-dessert.
Combien de menu différent peut-on composer ?

Exercice 9

On considère les lettres A, B, C et D.

1. Combien de mots de quatre lettres peut-on écrire, ces lettres pouvant être utilisées plusieurs fois ? On ne fera pas attention au sens du mot.
2. Combien de mots de cinq lettres peut-on écrire ?
3. Combien de mots de 6 lettres peut-on écrire ?

Exercice 10

On souhaite construire de nouveaux mots avec les lettres du mot MATHS. On ne se souciera pas de savoir si les mots obtenu ont un sens ou non. Chaque lettre ne peut être utilisée qu'une seule fois.

1. Combien de mots de 3 lettres peut-on construire :
   (a) sans restriction ?
   (b) sachant que A est en première position ?
   (c) sans utiliser la lettre T ?
2. combien de mots de 5 lettres peut-on construire ?
   (a) sans restriction ?
   (b) sachant que T est en troisième position et la lettre S en dernière position ?

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les nombres suivants :

1. $(n+1) \times n!$
2. $\dfrac{(n-5)!}{(n-7)!}$, avec $n \geqslant 7$
3. $\dfrac{(n+2)!}{(n+2)(n+1)}$
4. $\dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$

Exercice 12

Combien d'entier naturel distincts pourrait-on constituer avec trois chiffres choisis entre 0 et 9 inclus dans chacun des cas suivants :

1. Chaque chiffre pouvant être utilisé plusieurs fois.
2. Chaque chiffre ne pouvant être utilisé qu'une seule fois.

Exercice 13

On considère l'ensemble $F = \{a, b, c, d, e\}$

1. Donner tous les sous ensemble de F de cardinal 3

2. En déduire $\binom{5}{3}$

Exercice 14

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les nombres suivants :

1. $\dfrac{n! \times (n+2)!}{(n!)^2}$
2. $\dfrac{(n+1)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n-1)!}$, avec $n \geqslant 1$
3. $\dfrac{\big(2(n+1)\big)!}{(2n+1)!}$
4. $\dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!}$, avec $n \geqslant 2$

Exercice 15

Sur une grille de loto, un joueur choisit cinq nombres entre 1 et 49 puis un nombre chance entre 1 et 10.
Combien existe-il de grilles de loto possibles ?

Exercice 16

On lance un dé à six faces, numéroté de 1 à 6, sept fois de suite et on note à chaque lancer 1 si on obtient la face numéroté 6 et 0 dans les autres cas. On obtient donc un 7-uplet.

1. Dénombrement :
   (a) Justifier que chaque issue peut être associée une combinaison et donner la combinaison associée aux issues :
      - A : "seuls le premier et le 5ème dés ont donné le résultat 6".
      - B : "seuls les premier, deuxième, 4ième et 7ième dés ont donné le résultat 6".

   (b) En déduire le nombre d'issue de cette expérience ?

   (c) On considère l'événement : "On a obtenu 4 fois le nombre 6".
   Donner le nombre d'issues qui réalisent cet événement ?
2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque issue associe le nombre de fois que l'on obtient le nombre 6.
   (a) Donner la probabilité que seuls les 4 premiers lancers donne 6. (Vous pourrez vous aider d'un arbre de probabilité).

   (b) Donner la probabilité que seuls les lancers 2, 4, 5 et 7 donnent un 6.

(c) Déduire des questions précédentes la probabilité d'obtenir exactement 4 fois le nombre 6, c'est à dire $P(X = 4)$.

Exercice 17

Soit n un entier naturel dont la décomposition en produit de facteurs premiers est :

$$n = n_1^{p_1} \times n_2^{p_2} \times ... \times n_k^{p_k}$$

Par exemple, $18 = 2^1 \times 3^2$ et pour 18, on a $n_1 = 1$, $p_1 = 1$, $n_2 = 3$ et $p_2 = 2$.
Avec 25, on a $25 = 5^2$ d'où $n_1 = 5$, $p_1 = 2$

1. Combien de diviseurs positifs possède 18 ? et 25 ?
2. Dans le cas général, combien de diviseur positifs possède n ?
3. Donner le nombre de diviseurs positifs de 120.
4. Quel est le plus petit entier naturel ayant exactement 35 diviseurs positifs et dont la décomposition en nombre premiers fait intervenir au moins deux facteurs premiers distincts ?

Exercice 18

La pocker se joue avec un jeu de 32 cartes, chaque carte possédant une valeur (7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As) ainsi qu'une couleur (trèfle, carreau, coeur, pique).

1. Au départ, chaque joueur possède une "main" de 5 cartes.
   (a) Combien de mains différentes existe-t-il ?
   (b) Combien de mains ne comportant que des piques ?
   (c) Combien de mains ayant exactement 4 carreaux ?
   (d) Combien de main possède un carré d'as ?
   (e) Combien de main possède un carré ?
   (f) Combien de main possède un brelan ?
2. Déduire de la question 1 les probabilités des événements suivants :
   (a) La probabilité d'avoir toutes ces cartes de la même couleur ?
   (b) La probabilité d'avoir un carré ?
   (c) La probabilité d'avoir un brelan ?

Exercice 19

On considère trois ensembles A, B et C.

1. La distributivité de $\cap$ sur $\cup$
   (a) Soit x un élément $(A \cup B) \cap C$.
   Démontrer alors que x appartient à $(A \cap C) \cup (B \cap C)$
   (b) Réciproquement, soit x un élément de $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.
   Démontrer alors que x appartient à $(A \cup B) \cap C$
   (c) Que peut-on conclure des deux questions précédentes ?
2. En admettant que $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$, démontrer que :
   $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$