Dénombrement

I Cardinal et Principe additif

1 Cardinal

Définition

Soit E un ensemble fini, (c'est à dire ayant un nombre fini d'éléments).
On appelle cardinal de E, noté $\text{card}(E)$ le nombre d'élément de E

Exemples

2 Principe additif

Propriété (admise)

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ n ensembles finis deux à deux disjoints.
(c'est à dire : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ A_i \cap A_j = \emptyset$).

$$\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + ... + \text{card}(A_n)$$

Exemples

Remarque

Soit A une partie d'un ensemble E et $\overline{A}$ son complémentaire.

$$\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$$

Propriété

Soient A et B deux ensembles, on a :
$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

Exemples

Démonstration

II principe multiplicatif et k-uplet

1 principe multiplicatif

Définition

Soient E et F deux ensembles.
Le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples $(x; y)$ tel que $x \in E$ et $y \in F$.

Exemples

Remarque

Si A ou B est l'ensemble vide, alors $A \times B$ est aussi l'ensemble vide.

Propriété

Soient E et F deux ensembles finis.

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$$

Exemples

Démonstration

Danger

Le signe $\times$ dans $E \times F$ est le produit cartésien. Le résultat est donc un ensemble de couple alors que le signe $\times$ dans $\text{card}(E) \times \text{card}(F)$ représente la multiplication dans l'ensemble des entiers naturels et le résultat est un entier naturel.

2 k-uplet

Définition

Soient $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $E_1, E_2, ..., E_k$, k ensembles non vides.
Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times ... \times E_k$ est l'ensemble des listes ordonnées $(x_1, x_2, ..., x_k)$ où $\forall i \in [\![1, k]\!],\ x_i \in E_i$.
Chaque élément de ce produit cartésien est appelé k-uplet.

Propriété

Soient $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $E_1, E_2, ..., E_k$, k ensembles finis et non vides.

$$\text{card}(E_1 \times E_2 \times ... \times E_k) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times ... \times \text{card}(E_k)$$

Démonstration

Remarque

- Un 2-uplet est appelé un couple
- Un 3-uplet est appelé un triplet.

3 k-uplet d'un ensemble E^k

Définition

Soient E un ensemble fini non vide et k un entier naturel non nul.
On appelle **k-uplet d'éléments de E** tout élément du produit cartésien :

$$E^k = E \times E \times ... \times E \quad (k \text{ facteurs})$$

Exemple

Propriété

Soient E un ensemble fini non vide de cardinal n et k un entier naturel non nul.

$$\text{card}(E^k) = \text{card}(E)^k = n^k$$

Exemple

Démonstration

4 k-uplet d'elements distincts de E et permutation

Définition

Soient E un ensemble fini non vide de cardinal n et k un entier naturel inférieur ou égal à n. On appelle arrangement à k-éléments de E (ou k-arrangement) tout k-uplet d'éléments **distincts** de E

Exemple

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$
On appelle factoriel de n l'entier naturel défini par :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$$

Exemple

Propriété

Soient E un ensemble fini non vide de cardinal n et k un entier naturel inférieur ou égal à n.
Le nombre d'arrangement à k éléments de E (c'est à dire le nombre de k-uplet d'éléments distincts de E) est :

$$\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Démonstration

Définition

Soient E un ensemble fini non vide de cardinal n
On appelle permutation de E tout n-arrangement d'éléments de E, c'est à dire tout n-uplet d'éléments distinct de E.

Exemple

Propriété (admise)

Le nombre de permutation d'un ensemble de cardinal non nul n est $n!$

III Partie d'un ensemble et combinaisons

1 Partie d'un ensemble fini et combinaison

Définition

- On appelle partie d'un ensemble fini A tout sous ensemble de A.
- Une combinaison de k éléments de A est une partie de A de cardinal k.
- Le nombre de combinaison de k éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{p}$

Exemple

Propriété

Le nombre de partie d'un ensemble A de cardinal $n \in \mathbb{N}$ est 2^n

Démonstration

Propriété

Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$, on a :

1. $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
2. $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. **Relation de Pascale** : si $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Démonstration

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Démonstration