Loi Binomiale

Exercice 1

Un self service d'entreprise propose tout les jours les plats suivants :

- Un plat de résistance végétarien à 3 euros
- Un plat de résistance non végétarien à 4 euros
- Une part de fromage à 1 euros
- Un dessert à 1 euros

On note les évènements suivants :

- V : L'employé a pris un plat végétarien.
- F : L'employé a pris du fromage.
- D : l'employé a pris un dessert.

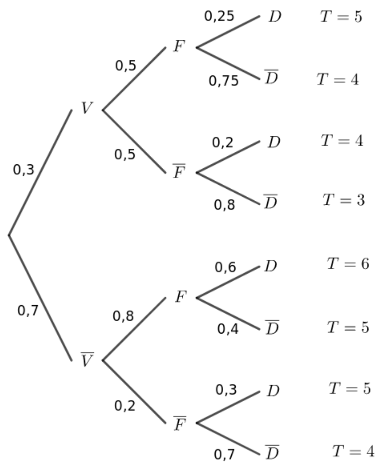
D'autre part :

- Tous les employés déjeunant au self prennent un plat de résistance et 30% d'entre eux choisissent le plat végétarien.
- La moitié des employés ayant choisi un plat végétarien prennent du fromage et 20% de ceux qui n'ont pas choisi de plat végétarien ne prennent pas de fromage.
- Un quart de ceux qui ont pris un plat végétarien et du fromage ont pris un dessert.
- Parmi ceux qui ont pris un plat végétarien sans prendre de fromage, 20% ont pris un dessert.
- 60% de ceux qui n'ont pas pris de plat végétarien mais fromage ont pris un dessert.
- Parmi ceux qui n'ont pris ni un plat végétarien ni du fromage, 30% ont pris un dessert.

1. Calcul de probabilité
   (a) Représenté la situation par un arbre de probabilité.
   (b) Donner $p_{\overline{V}}(F)$
   (c) Calculer $p(F)$
2. Soit T la variable aléatoire associant à chaque issue le prix payé par l'employé.
   (a) Donner l'ensemble des valeurs prisent par T.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de T et donner le résultat sous forme d'un tableau.
   (c) Calculer $E(T)$ et interprété le résultat dans le contexte de l'exercice.
   (d) Calculer l'écart type de la variable aléatoire T.

Correction de l'exercice 1

1. (a) .



(b) D'après l'énoncé, $\boxed{p_{\overline{V}}(F) = 0,8}$

(c) D'après la formule des probabilité totale, on a :
$$p(F) = p(V) \times p_V(F) + p\left(\overline{V}\right) \times p_{\overline{V}}(F)$$
$$= 0,3 \times 0,5 + 0,7 \times 0,8$$
$$\boxed{= 0,71}$$

2. (a) L'ensemble des valeurs prisent par T est $\boxed{E = \{3;4;5;6\}}$ (Voir arbre de probabilité).

(b) La loi de probabilité de T est donnée dans le tableau suivant :

x_i	3	4	5	6
$p(T = x_i)$	0, 12	0, 2405	0, 3035	0, 336

(c) $E(T) = 3 \times 0,12 + 4 \times 0,2405 + 5 \times 0,3035 + 6 \times 0,336$
$$\boxed{= 4,8555}$$
Si un très grand nombre d'employés déjeunent au self, le prix moyen d'un repas sera proche de $4,8555$ euros.

(d) .

x_i	3	4	5	6
$p(T = x_i)$	0, 12	0, 2405	0, 3035	0, 336
$(x_i - E(T))^2$	3, 4429	0, 7318	0, 0209	1, 3099

Donc :
$$V(T) \approx 1,12 \times 3,4429 + 0,2405 \times 0,7318 + 0,3035 \times 0,0209 + 0,336 \times 1,3099$$
$$\approx 1,0356$$
$$\boxed{\text{D'où } \sigma(T) \approx \sqrt{V(T)} \approx 1,0177}$$

Exercice 2

Une grande enseigne décide d'organiser un jeu permettant de gagner des bons d'achat. Le jeu se déroule en deux étapes :

- **Étape 1** : chaque client tire au hasard une carte sur laquelle figure un nombre de 1 à 50, chaque numéro ayant la même probabilité d'être découvert ;
- **Étape 2** :
  - ∗ s'il découvre un numéro compris entre 1 et 15, il fait tourner une roue divisée en 10 secteurs de même taille dont 8 secteurs contiennent une étoile ;

* sinon, il fait tourner une autre roue divisée elle aussi en 10 secteurs de même taille dont un seul secteur contient trois étoiles.

Un bon d'achat de 10 euros par étoile est gagné par le client si la roue s'arrête un secteur contenant au moins une étoile.

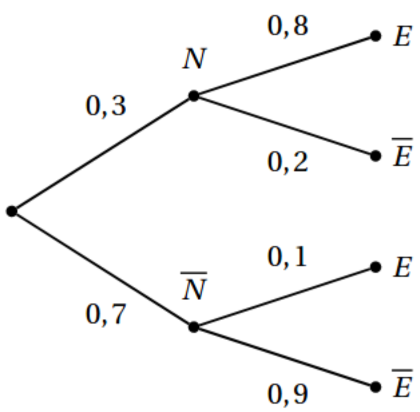
Un client joue à ce jeu. On note :
- N l'évènement « Le client découvre un numéro entre 1 et 15 » ;
- E l'évènement « Le client obtient au moins une étoile ».

1. (a) Justifier que $P(N) = 0,3$ et que $P_N(E) = 0,8$.
   (b) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
   (c) Calculer la probabilité que le client trouve un numéro entre 1 et 15 et une étoile.
   (d) Justifier que la probabilité que le client gagne un bon d'achat est égale à $0,31$.
   (e) Le client a gagné un bon d'achat. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu un numéro entre 1 et 15 à la première étape ?
2. Soit X la variable aléatoire associant à chaque issue le montant du bon d'achat obtenu.
   (a) Donner l'ensemble des valeurs prisent par la variable aléatoire X.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (c) Calculer $E(X)$ et interprété le résultat dans le contexte de l'exercice.
   (d) Un magasin de cette enseigne propose ce jeux à ses clients pendant 1 semaine. A peu près 1000 clients jouent a ce jeux par jours. Quelle somme ce magasin devra-t-il allouer à ce jeux pour cette campagne ?

Correction de l'exercice 2

1. (a)
   - $P(N) = \dfrac{15}{50} = \dfrac{3}{10} = \boxed{0,3}$
   - $P_N(E) = \dfrac{8}{10} = \boxed{0,8}$

   (b) Arbre pondéré modélisant la situation :



   (c) $P(E \cap N) = P_N(E) \times p(N) = 0,8 \times 0,3 = \boxed{0,24}$. La probabilité que le client trouve un numéro entre 1 et 15 et une étoile est 0,24.

   (d) $P(E) = P_N(E) \times p(N) + P_{\overline{N}}(E) \times P(\overline{N})$ (formule des probabiités totales)
   $= 0,24 + 0,1 \times 0,7 = 0,24 + 0,07 = 0,31$; $\boxed{P(E) = 0,31}$.

La probabilité que le client gagne un bon d'achat est égale à $0,31$.

(e) Le client a gagné un bon d'achat. $P_E(N) = \dfrac{P(E\cap N)}{P(E)} = \dfrac{0,24}{0,31} = \boxed{\dfrac{24}{31}}$. La probabilité qu'il ait obtenu un numéro entre 1 et 15 à la première étape sachant qu'il a gagné un bon d'achat est $\dfrac{24}{31}$.

2. (a) L'ensemble des valeurs prisent par la variable aléatoire X est $\boxed{E = \{0; 10; 30\}}$.

(b) La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant :

x_i	0	10	30
$p(X = x_i)$	$0,69$	$0,24$	$0,07$

(c) $E(X) = 0 \times 0,69 + 10 \times 0,24 + 30 \times 0,07$
$\boxed{= 4,5}$
Si un très grand nombre de clients participent à cette campagne, le coût moyen dépensé par client sera de $4,5$ euros.

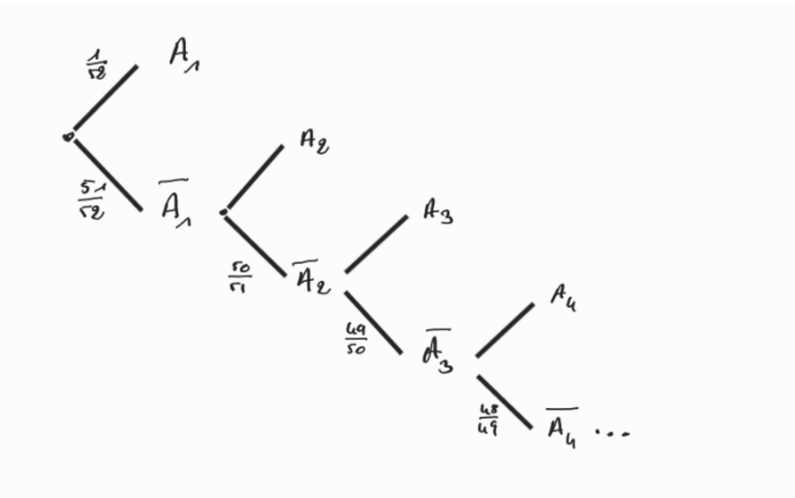
(d) $1000 \times 7 \times 4,5 = 31500$
Le coût de cette campagne est estimé à $\boxed{\text{31500 euros.}}$

Exercice 3

Un joueur pioche dans un jeu de 52 cartes autant de cartes qu'il le désire sans les regarder.
Une fois qu'il a fini, il en prend connaissance.
S'il a tiré l'as de pique, il perd 10 euros. Sinon, il gagne 1 euro par carte.
Combien doit-il piocher de cartes pour maximiser l'espérance du gain ? Combien peut-il alors espérer gagner ?

Correction de l'exercice 3

Soit n un entier naturel non nul. On suppose que le joueur pioche n cartes.
On note A_i l'événement : La $i^{\text{ième}}$ carte piochée est un as de pique.



On note A l'événement : L'as de pique a été pioché. La probabilité de ne pas tirer l'as de pique est : $P(\overline{A}) = \dfrac{51}{52} \times \dfrac{50}{51} \times \dfrac{49}{50} \times \ldots \times \dfrac{52-n+1}{52-n+2} \times \dfrac{52-n}{52-n+1}$

$= \dfrac{52-n}{52}$

$= 1 - \dfrac{n}{52}$

d'où la probabilité d'avoir un as de pique.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(1 - \frac{n}{52}\right) = \frac{n}{52}$$

La loi de probabilité X associant a chaque issue le gain réalisé lorsque l'on pioche n cartes est donc donnée par :

- $P(X = -10) = P(A) = \dfrac{n}{52}$
- $P(X = n) = P(\overline{A} = 1 - \dfrac{n}{52}$

D'où l'espérance :

$E(X) = -10 \times \dfrac{n}{52} + n \times \left(1 - \dfrac{n}{52}\right)$

$= \dfrac{n}{52} \times (-10 + 52 - n)$

$= \dfrac{n}{52} \times (42 - n)$

$E(X)$ est donc un polynôme en n du second degré dont les racines sont 0 et 42 et dont le coefficient du terme de degré 2 est négatif, donc $E(X)$ est maximal pour $n = \dfrac{0+42}{2} = 21$.

L'espérance de gain est donc maximale si le joueur pioche 21 cartes.

Dans ce cas, l'espérance est : $E(X) = \dfrac{21}{52} \times (42 - 21) = ...$

Exercice 4

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{9}{10}$

1. Calculer $P(X \leqslant 1)$
2. En déduire $P(X \geqslant 2)$

Correction de l'exercice 4

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = \dfrac{3}{7}$.

Calculer l'espérance et l'écart type de X.

Correction de l'exercice 5

Exercice 6

Tatiana participe à un jeu pour lequel elle doit payer 5 euros.
Dans un jeu de 32 cartes, elle doit tirée 4 cartes avec remise.
Si elle obtient quatre as, elle gagne m euros.
Si elle tire 1, 2 ou 3 as, elle gagne 10 euros.
Sinon, elle perd sa mise.

1. Si $m = 50$, le jeu est-il équitable ?
2. A partir de quelle valeur de m ce jeu devient-il favorable à Tatiana ?

Correction de l'exercice 6

Exercice 7

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux manières

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $0,24$.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie 2

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $0,24$.
   On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.
   (a) On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?
   (b) Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.

2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.

   On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0,24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

   (a) Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.

   (b) À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à $0,99$?

Correction de l'exercice 7

Exercice 8

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est $0,98$ (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est $0,995$ (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.
On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».
On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,08.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.
3. (a) Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?

   (b) Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à $0,95$.

   Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est $0,103$.

1. Dans cette question **1.** on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.

   On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.

   (a) Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

   (b) Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

(c) Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?

2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à $0,75$? Justifier.

Correction de l'exercice 8

Exercice 9

Une société de jeu en ligne propose une nouvelle application pour smartphone nommée « Tickets coeurs ! ».
Chaque participant génère sur son smartphone un ticket comportant une grille de taille 3×3 sur laquelle sont placés trois c ?urs répartis au hasard, comme par exemple ci-dessous.

	♡	
♡		
		♡

Le ticket est gagnant si les trois c ?urs sont positionnés côte à côte sur une même ligne, sur une même colonne ou sur une même diagonale.

1. Justifier qu'il y a exactement 84 manière différentes de positionner les trois coeurs sur une grille.
2. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale à $\dfrac{2}{21}$.
3. Lorsqu'un joueur génère un ticket, la société prélève 1 € sur son compte en banque. Si le ticket est gagnant, la société verse alors au joueur 5 €. Le jeu est-il favorable au joueur ?
4. Un joueur décide de générer 20 tickets sur cette application. On suppose que les générations des tickets sont indépendantes entre elles.
   (a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés.
   (b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'évènement $(X = 5)$.
   (c) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'évènement $(X \geqslant 1)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Correction de l'exercice 9

Exercice 10

Soit X une variable aléatoire qui suit le loi binomiale de paramètre $n = 56$ et $p = 0,13$.
Déterminer à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à 10^{-3} de :

1. $P_{X \leqslant 10}(X = 9)$
2. $P_{X>5}(X < 15)$

Correction de l'exercice 10

Exercice 11

Dans un petit service départemental d'incendie et de secours (SDIS) du Grand Ouest, la variable aléatoire X donnant le nombre d'interventions quotidiennes suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0.2$

1. Déterminer la probabilité qu'il se passe une journée sans aucune intervention.
2. Déterminer le nombre moyen d'interventions quotidiennes.
3. Sachant qu'une intervention a déjà eu lieu ce matin, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins trois interventions aujourd'hui ?

Correction de l'exercice 11

Exercice 12

Soient n un entier naturel non nul, p un nombre réel compris entre 0 et 1 et X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.
Cet exercice propose de démontrer que $E(X) = np$

1. Démontrer que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

2. On rappelle que que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \times p(X = k)$.

   Donner l'expression de $p(X = k)$ lorsque $0 \leqslant k \leqslant n$ puis en déduire que :

$$E(X) = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$$

3. En effectuant le changement d'indice $i = k - 1$, montrer que :

$$E(X) = np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^i(1-p)^{(n-1)-i}$$

4. En utilisant $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, déduire que $E(X) = np$

Correction de l'exercice 12

Exercice 13

On suppose que n touristes ($n \geqslant 3$) se retrouvent en haut de la falaise où se trouvent seulement deux chemins menant vers deux plages. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisi au hasard, de manière équiprobable et indépendamment des autres, l'une des deux directions suivantes : la plage à l'est ou la plage à l'ouest.
On note X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre de touristes qui choisissent la plage à l'est.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X.
2. On suppose ici que les deux plages sont désertes au départ et on considère qu'un touriste est heureux s'il se retrouve seul sur une plage.
   (a) Peut-il y avoir deux touristes heureux ?
   (b) Lorsque $n = 3$, quelle est la probabilité d'avoir un touriste heureux ?
   (c) De manière générale, démontrer que la probabilité p qu'il y ait un touriste heureux parmi n touriste est $p = \dfrac{n}{2^{n-1}}$
   (d) En déduire la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux sur un groupe de 10.

Correction de l'exercice 13