loi binomiale

1 Schéma de Bernoulli

Définition

une épreuve de Bernoulli de paramètre p est expérience aléatoire à deux issues, généralement dénommées succès et échec, la probabilité d'un succès étant p, celle d'un échec étant $q = 1 - p$.

Exemples

- Lancer d'une pièce de monnaie équilibré et savoir si le résultat et pile ou face est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$
- Interroger une personne dans la rue et lui demander si elle à plus ou moins de 30 ans est une expérience de Bernoulli.
- On lance un dé à 6 faces et on s'intéresse à la probabilité d'obtenir le résultat 6. Dans ce cas, le lancer du dé peu être considéré comme une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{6}$.

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si elle est à valeur dans $\{0; 1\}$ et si :

$$P(X = 1) = p \quad \text{et } P(X = 0) = 1 - p$$

La variable aléatoire X associe donc la valeur 1 au succès d'une l'expérience de Bernoulli et 0 à l'échec.

Exemples

- Si la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$, alors on a :

$$P(X = 1) = \frac{1}{2} \text{ et } P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

C'est le cas du lancer d'une pièce de monnaie, en considérant le résultat pile comme un succès.

- Si la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$, alors on a :

$$P(X=1)=\frac{1}{6} \text{ et } P(X=0)=\frac{5}{6}$$

C'est le cas du lancer d'un dé à 6 faces en considérant par exemple le résultat 6 comme un succès et tout autre résultat comme un échec.

Propriété

Soit X un variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p, on a alors :

$$E(X)=p \quad \text{et} \quad V(X)=p(n-p)$$

Démonstration

- $E(X)=1\times p+0\times(1-p)=p$
- $V(X)=(1-p)^2p+(0-p)^2(1-p)$

$$\begin{aligned} &=(1-p)^2p+p^2(1-p)\\ &=p(1-p)\times(1-p+p) \quad \text{par factorisation par } p(1-p)\\ &=p(1-p)\end{aligned}$$

2 Loi Binômiale

Définition

Soit n un entier naturel non nul.
On appelle **schéma de Bernoulli** la répétition de n épreuve de Bernoulli identiques et indépendantes.

Définition

On renouvelle n fois de manière **indépendante** une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Soit X la variable aléatoire dénombrant le nombre de succès obtenus à l'issue des n épreuves.
On dit alors que X suit la loi binomiale de paramètres n et p, noté $\mathcal{B}(n,p)$.

Exemple

On lance 15 fois de suite un dé à 6 faces dont les faces sont numérotés de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de fois que l'on a obtenu 6. On a bien la répétition 15 fois et de manière indépendante d'une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$. Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(15;\frac{1}{6}\right)$.

Propriété

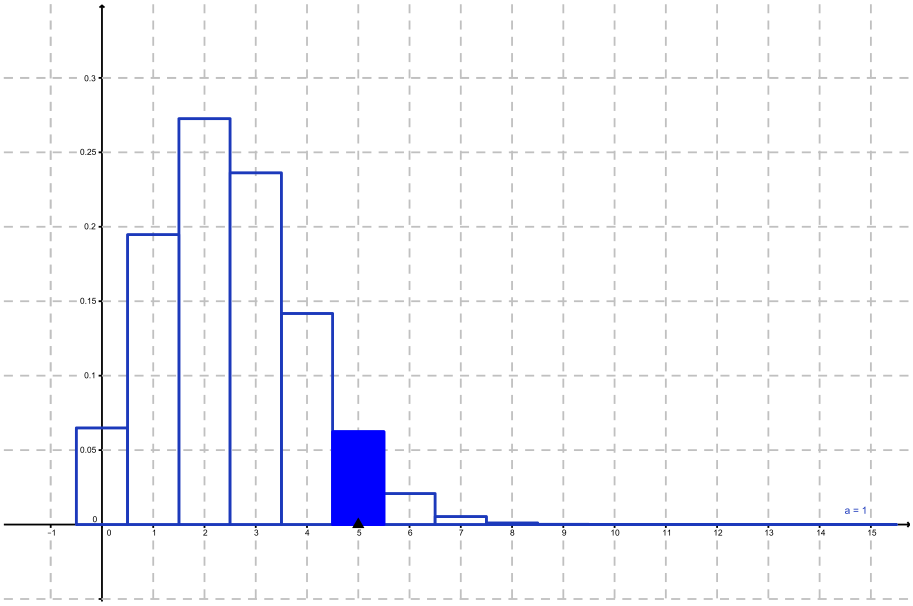
Soit X une variable aléatoire qui suit alors la loi binomiale de paramètres n et p, noté $\mathcal{B}(n,p)$.
On a alors pour tout entier naturel k tel que $k \in [0,n]$ on a :

$$P(X=k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$$

Exemple

On lance 15 fois de suite un dé à 6 faces dont les faces sont numérotés de 1 à 6.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de fois que l'on a obtenu 6.
On a bien la répétition 15 fois et de manière indépendante d'une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$. Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(15;\frac{1}{6}\right)$.
On a alors, par exemple pour $k=5$:

$$P(X=5) = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(1-\frac{1}{6}\right)^{15-5}$$



Démonstration

On considère une expérience aléatoire constitué de n épreuves de Bernoulli indépendantes.
Soient E l'ensemble de cardinal n des n épreuves de Bernoulli et k un entier naturel tel que $k \in [0;n]$
Chaque issue de l'expérience aléatoire peut être représentée par la combinaison de E constitué des succès. Par exemple $\{1;5;6\}$ signifie que seules la première, la cinquième et la sixième épreuves de Bernoulli ont été couronnées d'un succès avec bien sur, dans ce cas, $n \geq 6$.
Les n épreuves de Bernoulli étant indépendantes, la probabilité de n'importe quelle combinaison constitué de k succès est $p^k(1-p)^{n-k}$
Or le nombre de combinaisons à k éléments de E est $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, donc la probabilité d'avoir k succès

est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

X étant une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre n et p, noté $\mathcal{B}(n, p)$. On a alors :

1. $E(X) = np$
2. $V(X) = np(1-p)$
3. $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Exemple

dans l'exemple, on a donc :

- $E(X) = 15 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{2}$
- $\sigma(X) = \sqrt{15 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

Sur la calculatrice, si X suit la loi binômiale de paramètre n et p, pour calculer $P(X = k)$ où k est un entier compris entre 0 et n, on tape :

- **TI :** 2^{nd} + var + binomfdp(n,p,k) ou binomepdf(n,p,k)
- **CASIO :** OPTN + STAT + Dist + binm + Bpd et enfin VAR puis remplir la boite de dialog ou BinomPD(k,n,p)

Sur la calculatrice, si X suit la loi binômiale de paramètre n et p, pour calculer $P(X \leqslant k)$ où k est un entier compris entre 0 et n, on tape :

- **TI :** 2^{nd} + var + binomFRep(n,p,k)
- **CASIO :** OPTN + STAT + Dist + binm + Bcd et enfin VAR puis remplir la boite de dialog ou BinomCD(k,n,p)

Démonstration

La démonstration de cette propriété sera faite lors du chapitre sur le somme des variables aléatoires