loi binomiale

1 Schéma de Bernoulli

Définition

une épreuve de Bernoulli de paramètre p est expérience aléatoire à deux issues, généralement dénommées succès et échec, la probabilité d'un succès étant p, celle d'un échec étant $q = 1 - p$.

Exemples

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si elle est à valeur dans $\{0; 1\}$ et si :

$$P(X = 1) = p \quad \text{et } P(X = 0) = 1 - p$$

La variable aléatoire X associe donc la valeur 1 au succès d'une l'expérience de Bernoulli et 0 à l'échec.

Exemples

Propriété

Soit X un variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p, on a alors :

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(n-p)$$

Démonstration

2 Loi Binômiale

Définition

Soit n un entier naturel non nul.
On appelle **schéma de Bernoulli** la répétition de n épreuve de Bernoulli identiques et indépendantes.

Définition

On renouvelle n fois de manière **indépendante** une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Soit X la variable aléatoire dénombrant le nombre de succès obtenus à l'issue des n épreuves.
On dit alors que X suit la loi binomiale de paramètres n et p, noté $\mathcal{B}(n, p)$.

Exemples

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit alors la loi binomiale de paramètres n et p, noté $\mathcal{B}(n, p)$.

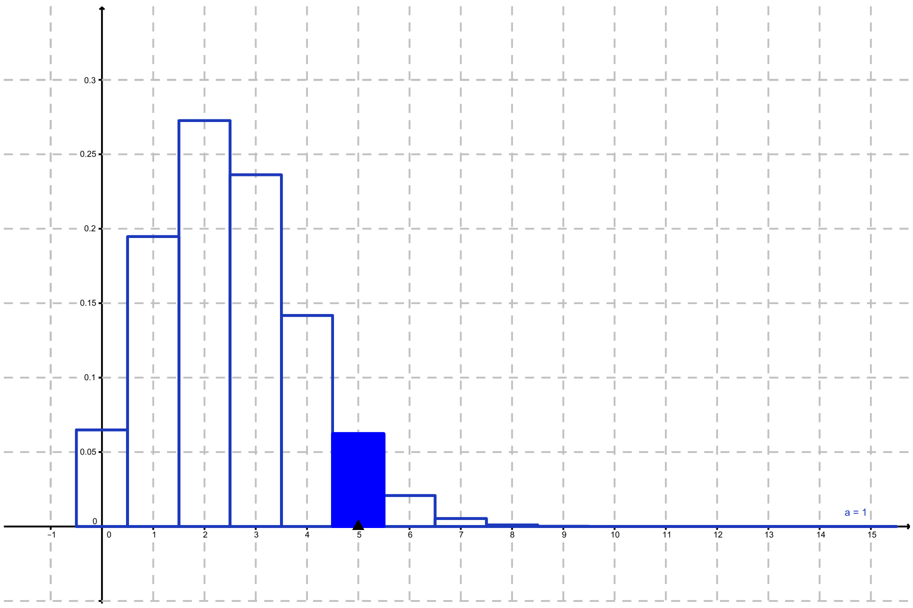
On a alors pour tout entier naturel k tel que $k \in [0,n]$ on a :

$$P(X=k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$$

Exemple

On lance 15 fois de suite un dé à 6 faces dont les faces sont numérotés de 1 à 6.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de fois que l'on a obtenu 6.
On a bien la répétition 15 fois et de manière indépendante d'une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$. Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(15;\frac{1}{6}\right)$.
On a alors, par exemple pour $k=5$:

$$P(X=5) = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(1-\frac{1}{6}\right)^{15-5}$$



Démonstration

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre n et p, noté $\mathcal{B}(n,p)$. On a alors :

1. $E(X) = np$
2. $V(X) = np(1-p)$
3. $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Exemples

Démonstration

La démonstration de cette propriété sera faite lors du chapitre sur le somme des variables aléatoires