DS commun de Mathématiques 1$^{\text{ère}}$ Spé

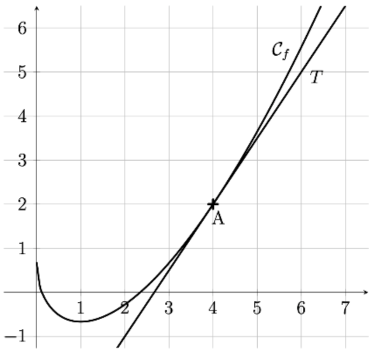
Il sera tenu compte pour une part importante de la rigueur et de la clarté de la rédaction.

Exercices 1 – 4 points

Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de la question et la réponse correspondante. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Notons (C_f) sa courbe représentative. Notons (T) la tangente à C_f en $x = 3$.
   Sachant que l'équation de (T) est : $y = -2x + 4$:
   a) (C_f) passe par le point $A(-2\,;4)$
   b) $f'(3) = -2$
   c) $f'(-2) = 3$

2. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe (C_f) d'une fonction f ainsi que sa tangente (T) au point A d'abscisse 4.

   a) $f'(4) = 2$
   b) $f'(4) = \frac{2}{3}$
   c) $f'(4) = \frac{3}{2}$

3. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$
   a) Pour tout nombre réel, $f(x) > 0$
   b) Pour tout nombre réel, $f(x) < 0$
   c) f s'annule une fois sur $\mathbb{R}$.

4. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Le minimum de g sur $\mathbb{R}$ est :
   a) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x) = -\frac{3}{2}$
   b) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x) = \frac{3}{4}$
   c) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x) = -\frac{1}{8}$

Exercice 2 – 4 points

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \frac{n-2}{2n+1}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Cette suite est-elle définie par récurrence ou de façon explicite ? Justifier votre réponse.
3. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(2n+1)(2n+3)}$
5. En déduire les variations de cette suite.

Exercice 3 – 6 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 4$$

On appelle C_f la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit a un réel.

1. Montrer que f est dérivable en a et déterminer $f'(a)$.
2. En déduire l'équation de la tangente T_a à C_f au point d'abscisse a.
3. Démontrer que T_a passe par le point $C(-1; 1)$ si et seulement $a^2 + 2a - 3 = 0$
4. En déduire qu'il existe deux points A et B de C_f pour lesquels la tangente à C_f passe par le point $C(-1; 1)$. Donner les abscisses de ces deux points A et B.

Exercice 4 – 4 points

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points :

$$A(3\,; -2), B(5\,; 2) \text{ et } C(-1\,; 1).$$

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que $\cos \widehat{BAC} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$ puis en déduire $\widehat{BAC}$ au dixième de degré près.
3. Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Calculer AH puis en déduire que $HC = \frac{11}{\sqrt{5}}$
4. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 5 – 4 points

Un terrain carré ABCD a pour côté $10\ m$.

Un paysagiste souhaite planter du gazon sur deux parties de ce terrain représentées par le carré AEFG et le triangle BFC de telle sorte que l'aire de la partie restante soit d'au moins 30 m².

On note $AE = x$.

1. A quel intervalle le nombre x appartient-il ?
2. Montrer que l'aire grisée peut s'exprimer sous la forme : $x^2 - 5x + 50$.
3. Démontrer que le problème peut se modéliser par l'inéquation :
$$-x^2 + 5x + 20 \geq 0.$$
4. Résoudre le problème du paysagiste.