Terminale Spé. maths

DS 7

CORRECTION

Exercice 1

① Voir annexe

② D'après l'énoncé, $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$

donc $\left.\begin{array}{l} PR = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{5} \\ QR = \sqrt{1^2+(-2)^2+0^2} = \sqrt{5} \end{array}\right\}$ d'où $PR = QR$

$\boxed{\text{donc } PQR \text{ est isocèle en } R}$

③ PQR est un triangle isocèle non aplati car $\overrightarrow{PR} \neq \overrightarrow{QR}$, donc P, Q et R ne sont pas alignés.

$\boxed{\text{donc } P, Q \text{ et } R \text{ définissent un plan.}}$

④ - a) $\vec{u}\cdot\overrightarrow{PR} = 2\times1+1\times0-1\times2 = 0$

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{QR} = 2\times1+1\times(-2)-1\times0 = 0$

donc $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires ayant des représentant dans (PQR) et par conséquent, $\vec{u}$ est un vecteur normal à (PQR).

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ étant un vecteur normal du plan (PQR), il existe un réel d tel qu'une équation cartésienne de (PQR) est :

$$2x+y-z+d=0$$

$P(0,0,1) \in (PQR)$ donc $2\times 0 + 0 - 1 + d = 0$
d'où $d = 1$

donc $\boxed{2x + y - z + 1 = 0}$ est une equation cartesienne de (PQR).

c) (d) étant orthogonal à (PQR) et $\vec{n}$ étant un vecteur normal à (PQR), ce dernier est aussi un vecteur directeur de (d). De plus $E(0,0,3) \in (d)$, d'où :

$$\boxed{(d) : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}}$$

d) (PQR) à pour equation cartesienne $2x + y - z + 1 = 0$
et

$$2\times\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{8}{3} + 1 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - \frac{8}{3} + \frac{3}{3}$$
$$= 0$$

donc $L \in (PQR)$

De plus $\vec{EL}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} - 3 \end{pmatrix}$ donc $\vec{EL}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

donc $\vec{EL} = \frac{1}{3}\vec{n}$ et par consequent $\vec{EL}$ est un vecteur normal a (PQR)

$\boxed{\text{Donc } L \text{ est le projeté orthogonal de } E \text{ sur } (PQR).}$

e) $EL = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

donc, d'après 2-d), la distance de E a (PQR) est $\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

⑤ le volume V du tétraèdre $EPQR$ est :

$V = \frac{1}{3} A_{EQR} \times EP$, car E est le projeté orthogonal de P sur (EQR)

d'où $V = \frac{1}{3} \frac{EQ \times ER}{2} \times 2$

$$\boxed{V = \frac{2}{3}}$$

⑥ De même,

$V = \frac{1}{3} A_{PQR} \times EL$, car L est le projeté orthogonal de E sur (PQR),

A_{PQR} étant l'aire de PQR

$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} A_{PQR} \times \frac{\sqrt{6}}{3}$

donc $\boxed{A_{PQR} = \frac{2 \times 3}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}}$

Exercice 2

PARTIE A

① . $A \in \mathcal{C}_f$ donc $f(1) = 3$

. (AB) étant la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A, on a :

$$\boxed{f'(1) = \frac{5-3}{3-1} = 1.}$$

② a) $a \geq 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + 1 > 0$ et par conséquent f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. en tant que composée de fonctions dérivables, et

$$\boxed{f'(x) = \frac{2ax}{ax^2+1}}$$

b) $f'(1) = 1$ donc $\dfrac{2a}{a+1} = 1$, d'où $2a = a+1$

par conséquent :

$$\boxed{a = 1}$$

de plus :

$f(1) = 3$ donc $\ln(1^2+1) + b = 3$,

d'où $\boxed{b = 3 - \ln 2}$

PARTIE B

① . $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+1) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2+1) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

② d'après 2-a, avec $a = 1$, on a :

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1>0$, donc $f'(x)$ est du signe de x, d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$3-\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(0) = \ln(0^2+1)+3-\ln 2 = 3-\ln 2$$

③ Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) = 3+\ln 2 &\iff \ln(x^2+1)+3-\ln 2 = 3+\ln 2 \\ &\iff \ln(x^2+1) = 2\ln 2 \\ &\iff \ln(x^2+1) = \ln(2^2) \\ &\iff x^2+1 = 4 \\ &\iff x^2 = 3 \\ &\iff x=\sqrt{3} \text{ ou } x=-\sqrt{3} \end{aligned}$$

PARTIE C

① la courbe $\mathcal{C}_g$ semble changer de convexité aux points de $\mathcal{C}_g$ d'abscisses -1 et 1.
C'est à dire au point $A(1;3)$ et $A'(-1;3)$

② On a $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$

avec : $$f''(x) = \frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}$$

donc $f''(x) = \dfrac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2}$

$$\boxed{f''(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}}$$

③ f étant une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est convexe sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(I) \geq 0$

or • $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^2+1)^2 > 0$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 2(1-x^2) \geq 0 &\iff (1-x^2) \geq 0 \\ &\iff 1 \geq x^2 \\ &\iff x \in [-1;1] \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc le plus grand intervalle sur lequel } f \text{ est convexe est } I = [-1;1]}$