Probabilité conditionnelle

1 Probabilité conditionnelle

Définition

Soit P une probabilité sur un univers E et A un évènement tel que $P(A) \neq 0$

- Pour tout B, on appelle **probabilité de B sachant A** le réel :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- L'application qui a tout événement B associe le réel $P_A(B)$ définit une probabilité sur E appelé **probabilité conditionnelle sachant A**.

Exemple

Propriété

Si A est un événement de probabilité non nulle et B un événement quelconque dans l'univers E, on a :

- $P_A(A) = 1$
- $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$
- Si A et B sont disjoints (ou incompatibles), alors $P_A(B) = 0$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

Démonstration

2 Evénements indépendants

Définition

Soit P une probabilité sur un univers E
On dit que les évènements A **et** B **sont indépendants** si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Propriété

Soit P une probabilité sur un univers E
Si $P(A) \neq 0$ on a :
A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$

Remarque

ans les conditions de la proposition, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ est beaucoup plus proche du sens que l'on peut donner à l'indépendance de deux événement dans la vie courante.
En effet, dans une population, dire que le genre, fille ou non, de la personne et la possibilité qu'une personne ait des lunettes sont indépendant signifie que la proportion de filles ayant des lunettes sur l'ensemble des filles est la même que la proportion que la personne ait des lunettes sur l'ensemble de la population.
Néanmoins, pour utilisé cette propriété, il faut qu'il y ait des filles dans notre population, c'est à dire que l'événement :" la personne choisie au hasard est une fille " ne soit pas de probabilité nulle.
Cette restriction n'intervient pas dans la définition de l'indépendance de deux événement.

Démonstration

I Formule des probabilités totales

Définition

on dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est une partition de l'univers (ou un système complet d'évènements de l'univers) Ω si et seulement si ces événements sont deux à deux disjoints et que leur réunion est égale à l'univers Ω

Remarque

Pour tout événement A de l'univers, $\{A; \overline{A}\}$ est une partition de l'univers.

Théorème

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un système complet d'événements de l'univers E et B un événement quelconque de E. On a :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B) \times P(A_k)$$

Exemple