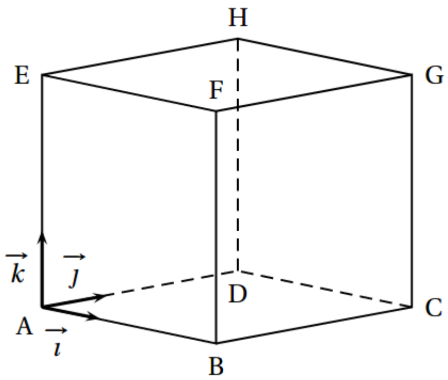
TS - DS 7 du 17 Janvier

2023-2024

Exercice 1 **10 points**

Le solide ABCDEFGH est un cube. On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ~;~ \vec{\imath},~ \vec{\jmath},~ \vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel les coordonnées des points B, D et E sont :

$$\text{B}(3 ~;~ 0 ~;~ 0), \text{D}(0 ~;~ 3 ~;~ 0) \text{ et } \text{E}(0 ~;~ 0 ~;~ 3).$$

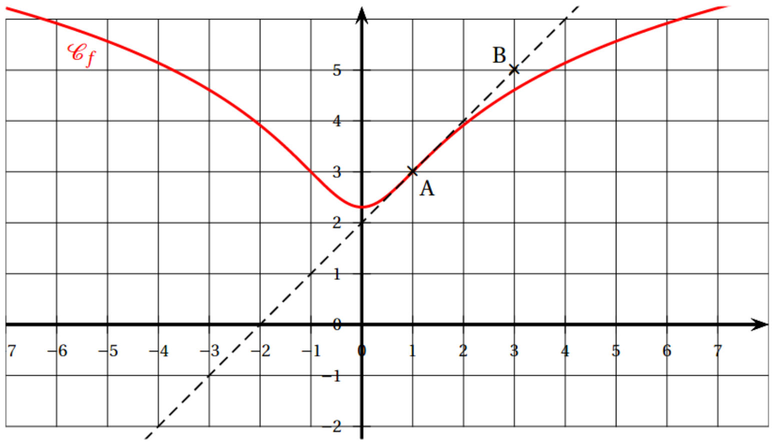


On considère les points P(0 ; 0 ; 1), Q(0 ; 2 ; 3) et R(1 ; 0 ; 3).

1. Placer les points P, Q et R sur la figure en ANNEXE qui sera à rendre avec la copie.
2. Montrer que le triangle PQR est isocèle en R.
3. Justifier que les points P, Q et R définissent un plan.
4. On s'intéresse à présent à la distance entre le point E et le plan (PQR).
   (a) Montrer que le vecteur $\vec{u}(2 ~;~ 1 ~;~ -1)$ est normal au plan (PQR).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (PQR).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point E et orthogonale au plan (PQR).
   (d) Montrer que le point $\text{L}\left(\dfrac{2}{3} ~;~ \dfrac{1}{3} ~;~ \dfrac{8}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point E sur le plan (PQR).
   (e) Déterminer la distance entre le point E et le plan (PQR).
5. En choisissant le triangle EQR comme base, montrer que le volume du tétraèdre EPQR est $\dfrac{2}{3}$.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur correspondante.}$$
6. Trouver, à l'aide des deux questions précédentes, l'aire du triangle PQR.

Exercice 2 **10 points**

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points A$(1\,;\,3)$ et B$(3\,;\,5)$.
On donne ci-dessous $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln\left(ax^2+1\right)+b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
   (a) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   (b) Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2).$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 3+\ln 2$.

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2)$.

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f''(x) = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.
3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

ANNEXE à rendre avec la copie