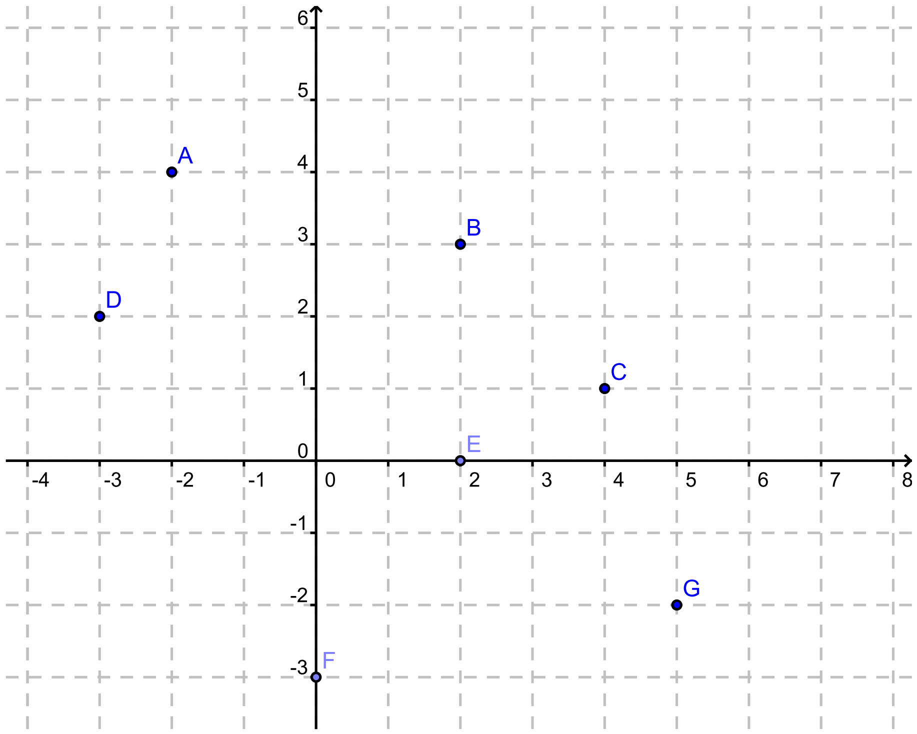
Nombres complexes : Interprétation géométrique

Exercice 1

Par lecture graphique, déterminer les affixes des points suivants :



Exercice 2

Dans le plan complexe, on donne les points par leurs affixes :

$A(-2+i)$, $\quad B(-3-3i)$, $\quad C(\dfrac{1}{2}-2i)$

Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 3

On considère les points A, B, C et 0 d'affixes :

$z_A = \dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$, $z_B = 2-\dfrac{1}{2}i$, $z_C = -\dfrac{1}{2}+2i$ et $z_0 = 0$

Démontrer, en utilisant l'affixe du milieu de $[BC]$, que $ABOC$ est un parallélogramme.

On rappelle qu'un parallélogramme est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leurs milieux

Exercice 4

On considère le parallélogramme $ABCD$, avec A, B, C et D d'affixes :

$$z_A = -1 - 5i \quad , \quad z_B = 4 - 3i \quad , \quad z_C = 3 + 3i \quad \text{et} \quad z_D = -2 + i$$

1. Déterminer l'affixe du point C', symétrique de C par rapport à D
2. Déterminer l'affixe du point A' tel que $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $A'BC'D$?

Exercice 5

Soient $(O; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormal direct du plan et a et b deux réels.
Déterminer l'ensemble des points $M(a + ib)$ du plan tels que le nombre complexe $z = 2a + b + i(b - 1)$ soit :

1. Un réel
2. Un imaginaire pur
3. nul

Exercice 6

Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes ci-dessous.

1. $z = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$
2. $z = 5e^{i\frac{5\pi}{3}}$
3. $z = 4e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{6\pi}{4}}$
4. $z = \dfrac{3e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

Exercice 7

Ecrire sous forme exponentielle chacun des nombres suivants

1. $z = 3$
2. $z = 2i$
3. $z = -\sqrt{3} - i$
4. $z = 3 - 3i$
5. $z = -5$
6. $z = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^3$
7. $z = \dfrac{2}{1 - i}$
8. $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$

Exercice 8

Soit $z \in \mathbb{C}$ définit par :

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$$

1. Déterminer la forme algébrique de z
2. Déterminer une forme exponentielle, puis une forme trigonométrique de z.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 9

Soit $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ un nombre complexe

1. On cherche à déterminer deux réels strictement positifs a et b tels que $(a+ib)^2 = z$.
   (a) On suppose dans un premier temps que ces deux réels existent.
      i. démontrer que a et b vérifient le système d'équation :

$$\begin{cases} 8a^4 - 4\sqrt{2}a^2 - 1 = 0 \\ b = \dfrac{1}{2\sqrt{2}a} \end{cases}$$

      ii. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $8x^2 - 4\sqrt{2}x - 1 = 0$.
      iii. Déduire des questions précédentes que $a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

   (b) Vérifier que les deux réels a et b déterminés précédemment conviennent.
   (c) Montrer que $b = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}$
2. On cherche à déterminer un forme exponentielle de $a+ib$.
   (a) Déterminer une forme exponentielle de z.
   (b) Déterminer un réel $\theta \in [0;\pi[$ tel que $z = \left(e^{i\theta}\right)^2$.
   (c) Déduire de la question précédente une forme exponentielle de $a+ib$.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 10

Vrai / Faux

1. Le conjugué de $1 - e^{i\theta}$ est $1 - e^{-i\theta}$
2. Un argument de $\frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{i\frac{\pi}{3}}$ est $\frac{-\pi}{12}$
3. Si $n \in \mathbb{N}^*$ est un multiple de 4, alors $z_n = (1-i)^n$ est un réel strictement négatif.

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$

Exercice 11

Soient A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$. On considère l'application f qui a tout point M d'affixes z, différent de B, fait correspondre le point M' d'affixes z' défini par :

$$z' = \frac{z-1}{z+1}$$

1. Déterminer les points invariant par f, c'est à dire les points M tels que $f(M) = M$.
2. (a) Montrer que pour tout $z \neq -1$, $(z'-1)(z+1) = -2$.
   (b) En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$ puis entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$ pour tout $z \neq -1$.
   Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
3. Montrer que si M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre B et de rayon 2, alors M' appartient à un cercle $\mathcal{C}'$
4. Soit P le point d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.
   (a) Déterminer la forme exponentielle de $p+1$ puis montrer que P appartient à $\mathcal{C}$
   (b) Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$. Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.
   (c) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par f.

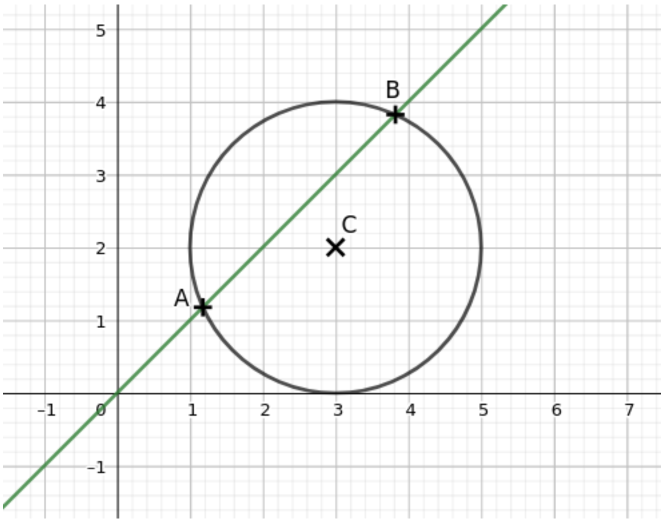
Exercice 12

Pour chacune des deux affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions :

$$|z-1| = |z-\mathrm{i}| \quad \text{et} \quad |z-3-2\mathrm{i}| \leqslant 2.$$

Sur la figure ci-dessous, on a représenté le cercle de centre le point de coordonnées $(3\,;\,2)$ et de rayon 2, et la droite d'équation $y = x$.
Cette droite coupe le cercle en deux points A et B.



Affirmation 1 : l'ensemble S est le segment [AB].

Affirmation 2 : le nombre complexe $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{1515}$ est un réel.