Nombres complexes - Interprétation géométrique

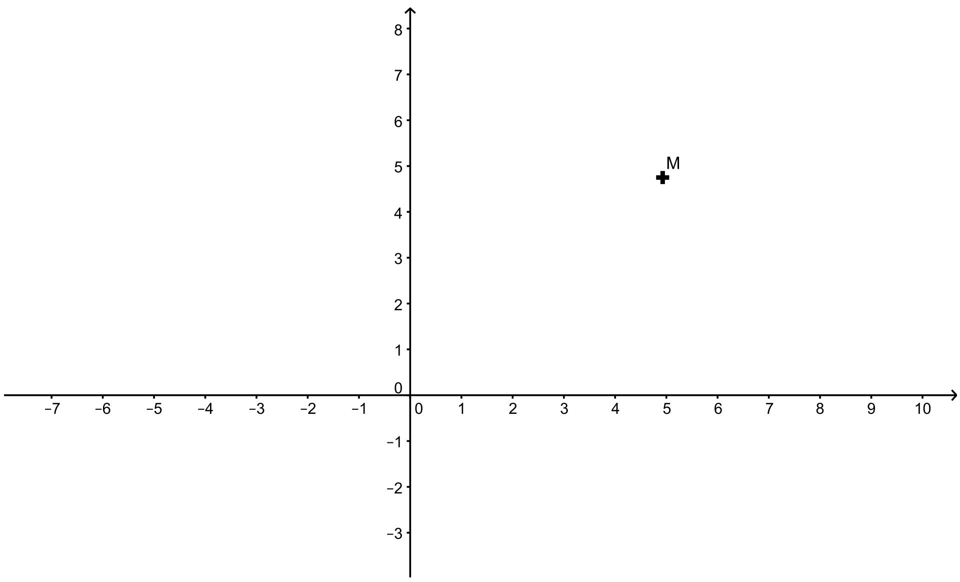
I Module et argument d'un nombre complexes

Dans tout ce chapitre, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.
On dit que M est le point du plan d'affixe $z = a + ib$ si M a pour coordonnées $(a; b)$ dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on écrit alors : $M(a + ib)$

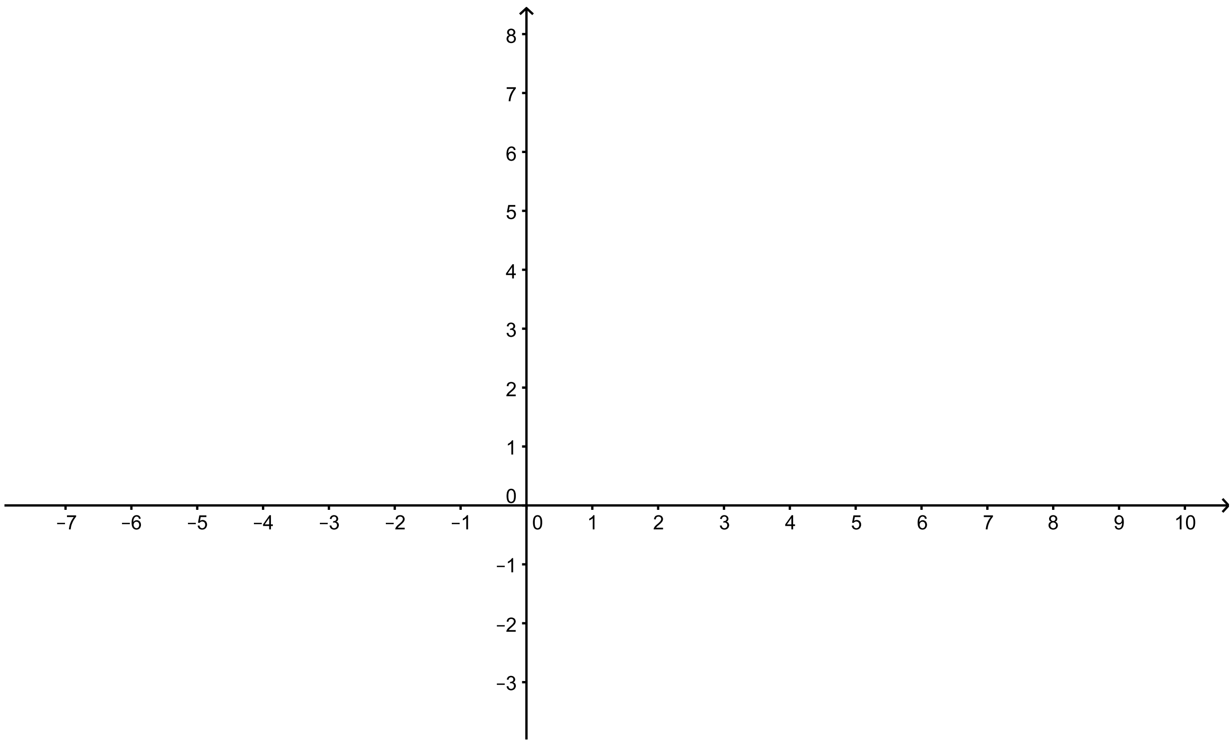
- Le **module** de z, noté $|z|$, est le réel strictement positif définit par $|z| = OM$
- On appelle **argument** de z, noté $\arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



Exemples

Remarque

- Un nombre complexe a plusieurs arguments, par exemple $1+i$ a pour argument $\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \frac{-7\pi}{4}$...
- Si $z = a + ib$ avec a et b réels, alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Un nombre complexe est nul si et seulement si son module est nul.



Propriété

Pour tout nombre complexe z, on a $|z|^2 = z\overline{z}$

Démonstration

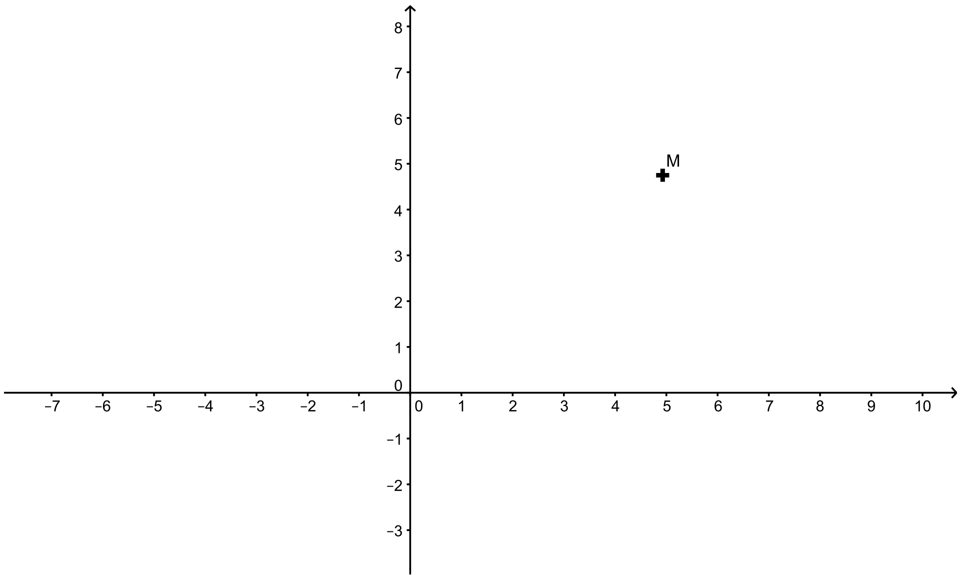
Définition

Soit A et B deux points du plan d'affixe respectives z_A et z_B. On appelle affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ le nombre complexe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

Propriété

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur d'affixe $z_B - z_A$ dans le plan complexe de repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

- $|z_B - z_A| = AB$
- $\arg(z_B - z_A) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right)$



Propriétés

1. Pour tout nombre complexe z, $|-z| = |z|$ et $|\overline{z}| = |z|$
2. Pour tout nombre complexe z, $z\overline{z} = |z|^2$
3. Pour tout nombre complexe z non nul, $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$.

Exemple

Démonstration

Propriété

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

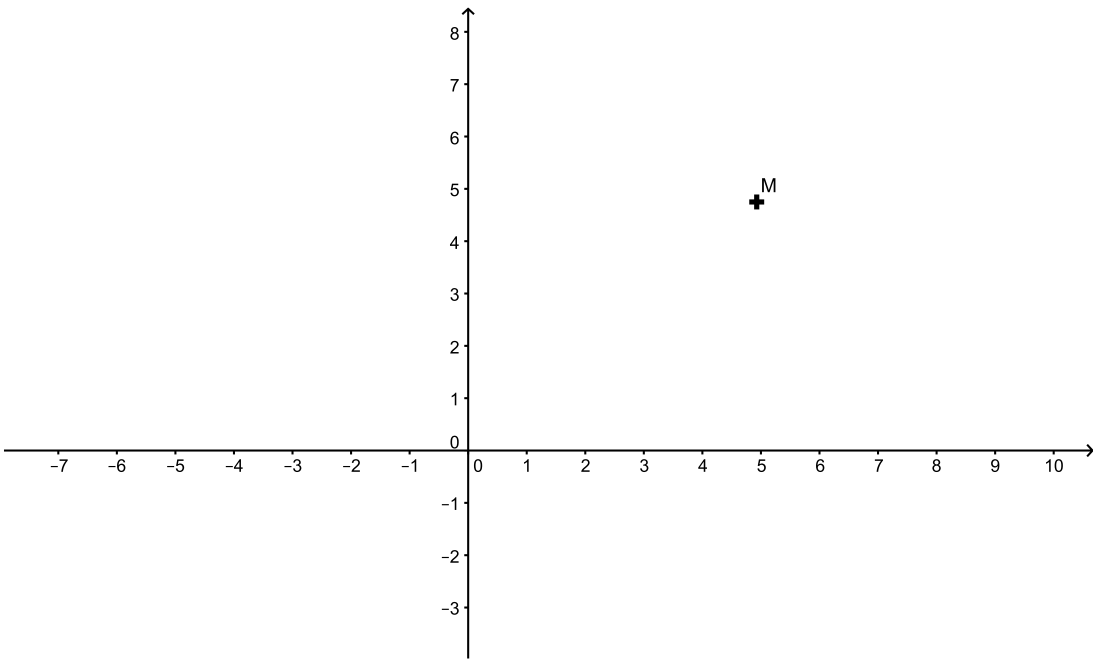
- $|zz'| = |z||z'|$
- avec $z' \neq 0$, on a : $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$
- avec $z' \neq 0$, on a : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Exemple

Démonstration

II Forme trigonométrique

1 Introduction



Propriété

Tout nombre complexe non nul $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous la forme

$$z = r\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)$$

avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ avec θ (modulo 2π).
Cette forme est appelée **forme trigonométrique** de z.

dans ce cas :

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{array} \right.$$

Exemple

Propriétés préliminaires : Rappel

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ et $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\sin(a)$

Démonstration

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.

- En effet, si $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\cos(a)\\ \sin(a)\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\cos(b)\\ \sin(b)\end{pmatrix}$ dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on a :
  D'une part $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = OB \times OA \times \cos(a-b) = \cos(a-b)$
  D'autre part $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \cos(b)\cos(a) + \sin(b)\sin(a)$
  D'où $\cos(a-b) = \cos(b)\cos(a) + \sin(b)\sin(a)$ ou encore $\boxed{\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)}$
- $\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b)$
  or $\cos(-b) = \cos(b)$ et $\sin(-b) = -\sin(b)$
  donc $\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$
- $\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right)$, d'où :
  $\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b)$
  $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
  et par conséquent $\boxed{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(-b) + \sin(-b)\cos(a)$,
  or $\cos(-b) = \cos(b)$ et $\sin(-b) = -\sin(b)$
  donc $\boxed{\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)}$

Propriété

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
- avec $z' \neq 0$, on a : $\arg\left(\dfrac{1}{z'}\right) = -\arg(z')$
- avec $z' \neq 0$, on a : $\arg\left(\dfrac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Démonstration

Propriété

Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_c et z_D.

- $\left|\dfrac{z_D - z_C}{z_b - z_A}\right| = \dfrac{CD}{AB}$
- $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$

Démonstration

Remarque

Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_c et z_D.

- Si $\dfrac{z_D - z_C}{z_b - z_A}$ est un réel, alors les droites (CD) et (AB) sont parallèles.
- Si $\dfrac{z_D - z_C}{z_b - z_A}$ est un imaginaire pure, alors les droites (CD) et (AB) sont perpendiculaires.

2 Forme exponentielle

On remarque que pour tout nombres complexes non nul z et z', on a :

$$|zz'| = |z| \times |z'| \quad \text{et} \quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

En posant $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ et $z' = r'\mathrm{e}^{i\theta'}$, avec r et r' les modules respectife de z et z' et θ et θ' les arguments de z et z', on obtient, en utilisant le propriétés usuel de la fonction exponentielle :

$$zz' = r\mathrm{e}^{i\theta} \times r'\mathrm{e}^{i\theta'} = rr'\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\theta'} = rr'\mathrm{e}^{i\theta + i\theta'} = rr'\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$$

Cette notation est donc bien adaptée au produit de deux nombres complexes.

Définition

Le nombre complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ avec :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Propriété

Tout nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite **forme exponentielle** :

$$z = re^{i\theta} \qquad \text{avec} \quad r = |z| \quad \text{et} \quad \theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$$

Démonstration

Exemple