# Nombres complexes - Interprétation géométrique

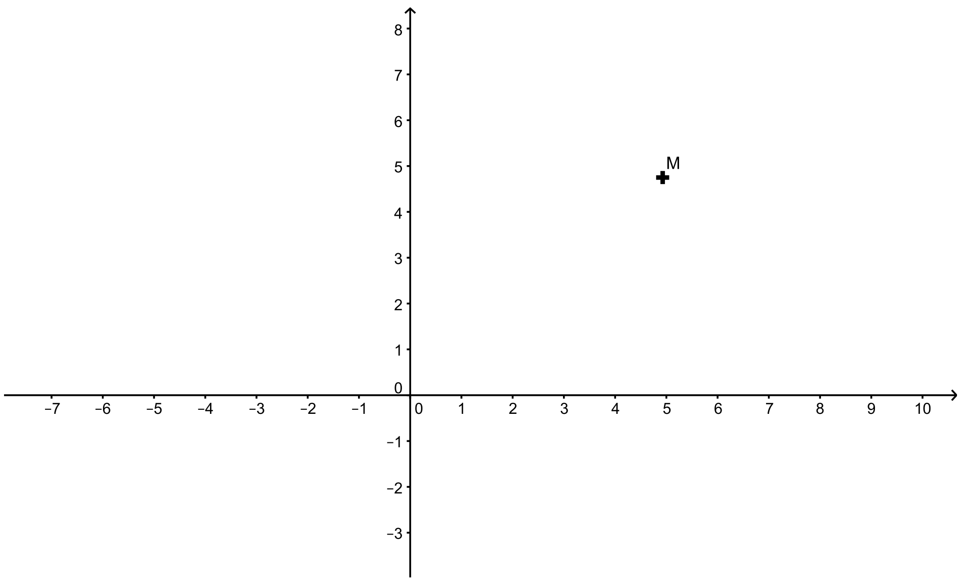
## I Module et argument d'un nombre complexes

Dans tout ce chapitre, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

**Définition**

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.
On dit que $M$ est le point du plan d'affixe $z = a + ib$ si $M$ a pour coordonnées $(a; b)$ dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ , on écrit alors : $M(a + ib)$

- Le **module** de $z$, noté $|z|$, est le réel strictement positif définit par $|z| = OM$
- On appelle **argument** de $z$, noté $\arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



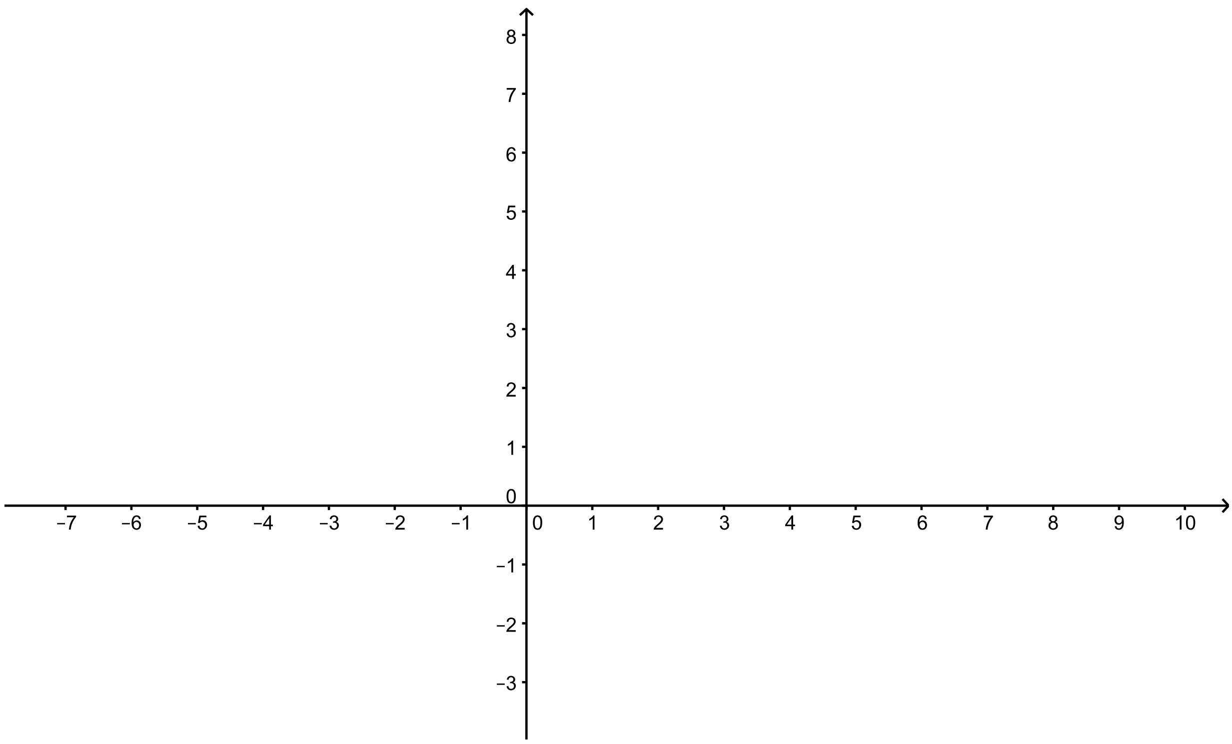

**Exemple**

avec $z = 2 + i2\sqrt{3}$, on obtient :
$|z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$
D'autre part, en notant $\theta$ l'argument de $z$, on a :
$\cos(\theta) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ modulo $2\pi$.

## Remarque

- Un nombre complexe a plusieurs arguments, par exemple $1+i$ a pour argument $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{9\pi}{4}, \dfrac{17\pi}{4}, \dfrac{-7\pi}{4}$...
- Si $z = a + ib$ avec $a$ et $b$ réels, alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Un nombre complexe est nul si et seulement si son module est nul.




## Propriété

Pour tout nombre complexe $z$, on a $|z|^2 = z\overline{z}$

## Démonstration

En effet, avec $z = a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} z.\bar{(}z) &= (a+ib)(a-ib) \\ &= a^2 - (ib)^2 \\ &= a^2 - i^2 b^2 \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

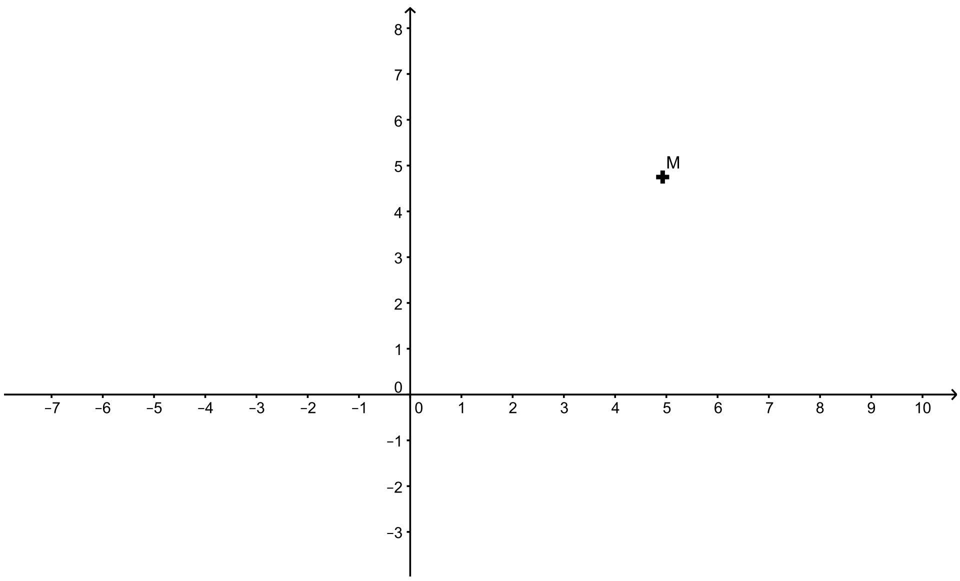
## Définition

Soit $A$ et $B$ deux points du plan d'affixe respectives $z_A$ et $z_B$. On appelle affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ le nombre complexe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

## Propriété

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur d'affixe $z_B - z_A$ dans le plan complexe de repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ .

- $|z_B - z_A| = AB$
- $\arg(z_B - z_A) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right)$




## Propriétés

1. Pour tout nombre complexe $z$, $|-z| = |z|$ et $|\overline{z}| = |z|$
2. Pour tout nombre complexe $z$, $z\overline{z} = |z|^2$
3. Pour tout nombre complexe $z$ non nul, $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$.

## Exemple

## Démonstration

## Propriété

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

- $|zz'| = |z||z'|$
- avec $z' \neq 0$, on a : $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$

- avec $z' \neq 0$, on a : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

### Exemples

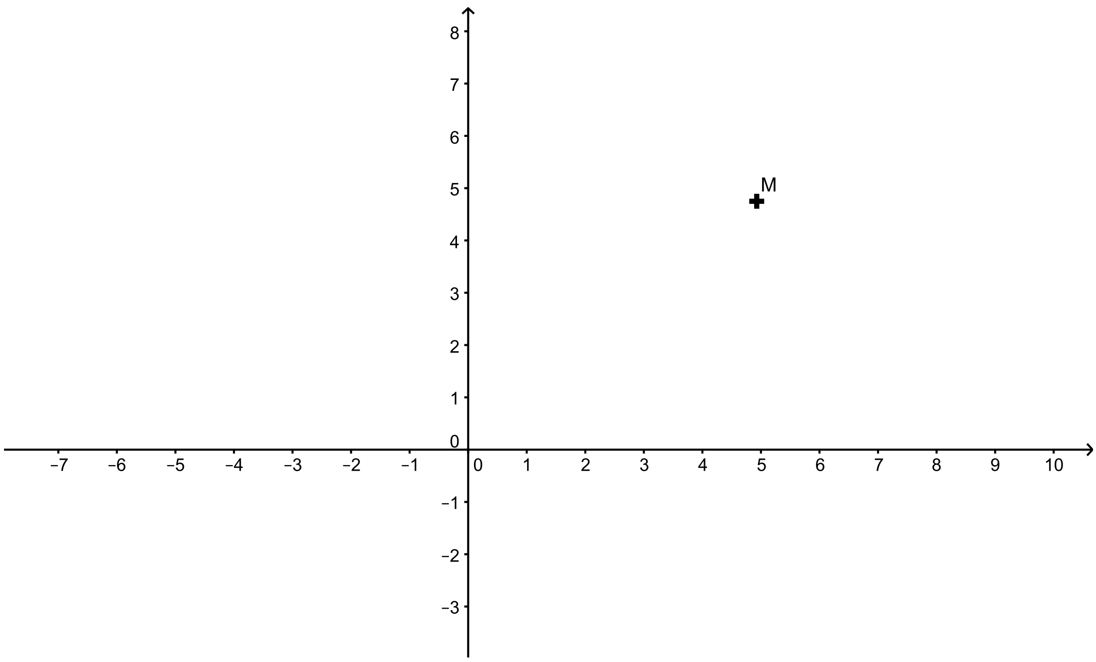
### Démonstration

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

- $|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = zz'\overline{z}\overline{z'} = z\overline{z}z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2$, d'où $\boxed{|zz'| = |z||z'|}$
- avec $z' \neq 0$, on a : $\left|\dfrac{1}{z'}\right|^2 = \dfrac{1}{z'}\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{z'}\dfrac{1}{\overline{z'}} = \dfrac{1}{z'\overline{z'}} = \dfrac{1}{|z'|^2} = \left(\dfrac{1}{|z'|}\right)^2$, d'où $\boxed{\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}}$
- avec $z' \neq 0$, on a : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \left|z\dfrac{1}{z'}\right| = |z|\left|\dfrac{1}{z'}\right| = |z|\dfrac{1}{|z'|}$, d'où $\boxed{\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}}$

# II Forme trigonométrique

## 1 Introduction




### Propriété

Tout nombre complexe non nul $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous la forme

$$z = r\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)$$

avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ avec $\theta$ (modulo $2\pi$).
Cette forme est appelée **forme trigonométrique** de $z$.

dans ce cas :

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

## Exemples

- Soit $z = 1+i$
  On a donc $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, d'où, par une factorisation par $\sqrt{2}$, on obtient :
  $z = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
  et par conséquent $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ modulo $2\pi$
- Soit $z = 4-3i$
  On a donc $|z| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$, d'où, par une factorisation par 5, on obtient :
  $z = 5 \times \left(\dfrac{4}{5} + i\dfrac{-3}{5}\right)$
  et par conséquent $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{4}{5} \\ \sin(\theta) = \dfrac{-3}{5} \end{cases}$ donc $\theta = -\arccos\left(\dfrac{4}{5}\right)$ modulo $2\pi$

## Propriétés préliminaires : Rappel

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ et $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\sin(a)$

## Démonstration

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.

- En effet, si $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\cos(a)\\ \sin(a)\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\cos(b)\\ \sin(b)\end{pmatrix}$ dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ , on a :
  D'une part $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = OB \times OA \times \cos(a-b) = \cos(a-b)$
  D'autre part $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \cos(b)\cos(a) + \sin(b)\sin(a)$
  D'où $\cos(a-b) = \cos(b)\cos(a) + \sin(b)\sin(a)$ ou encore $\boxed{\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)}$
- $\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b)$
  or $\cos(-b) = \cos(b)$ et $\sin(-b) = -\sin(b)$
  donc $\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$
- $\sin(a+b) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) - b\right)$, d'où :
  $\sin(a+b) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)\sin(b)$
  $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
  et par conséquent $\boxed{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(-b) + \sin(-b)\cos(a)$,

or $\cos(-b) = \cos(b)$ et $\sin(-b) = -\sin(b)$
donc $\boxed{\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)}$

### Propriété

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
- avec $z' \neq 0$, on a : $\arg\left(\dfrac{1}{z'}\right) = -\arg(z')$
- avec $z' \neq 0$, on a : $\arg\left(\dfrac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

### Démonstration

### Propriété

Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_c$ et $z_D$.

- $\left|\dfrac{z_D - z_C}{z_b - z_A}\right| = \dfrac{CD}{AB}$
- $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$

### Démonstration

### Remarque

Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_c$ et $z_D$.

- Si $\dfrac{z_D - z_C}{z_b - z_A}$ est un réel, alors les droites $(CD)$ et $(AB)$ sont parallèles.
- Si $\dfrac{z_D - z_C}{z_b - z_A}$ est un imaginaire pure, alors les droites $(CD)$ et $(AB)$ sont perpendiculaires.

## 2 Forme exponentielle

On remarque que pour tout nombres complexes non nul $z$ et $z'$, on a :

$$|zz'| = |z| \times |z'| \quad \text{et} \quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

En posant $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, avec $r$ et $r'$ les modules respectife de $z$ et $z'$ et $\theta$ et $\theta'$ les arguments de $z$ et $z'$, on obtient, en utilisant le propriétés usuel de la fonction exponentielle :

$$zz' = re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i\theta}e^{i\theta'} = rr'e^{i\theta + i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

Cette notation est donc bien adaptée au produit de deux nombres complexes.

### Définition

Le nombre complexe de module 1 dont un argument est $\theta$ est noté $e^{i\theta}$ avec :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

### Propriété

Tout nombre complexe non nul $z$ de module $r$ et d'argument $\theta$ s'écrit sous la forme suivante, dite **forme exponentielle** :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{avec} \quad r = |z| \quad \text{et} \quad \theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$$

### Démonstration

### Exemples