Primitive et equations différentielles

1 Equations différentielles - Introduction

- Au début du XIX siècle, un économiste Britannique essaie de modéliser la croissance de la population en supposant que l'accroissement d'une population est proportionnelle au nombre d'individus constituant cette population. En résumer si une population A est 3 fois plus importante qu'une population B, il y aura 3 fois plus de naissance et 3 fois plus de décès sur une période donnée dans la population A et par conséquent l'accroissement de la population A sera 3 fois supérieure à celui de la population B sur la même période.
  Soit f la fonction associant à chaque réel x le nombre d'individu d'une population A en fonction de l'année x.
  L'année 0, la population mondiale était estimée à 200 millions, d'où $f(0) = 200$.
  L'évolution dans le temps étant continue, on peut considérer que f est une fonction continue et dérivable.
  Dans ce cas, en considérant que l'accroissement de la population sur une période h est proportionnel la période multiplier par le nombre d'individus , on suppose qu'il existe un réel k tel que $f'(x) = kf(x)$.
  Ce type d'équation où l'inconnue est une fonction et l'égalité donne une relation entre la dérivée f' de f et la fonction f est appelée équation différentielle.
  On dit dans ce cas que f est solution de l'équation différentielle $y' = ky$, y représentant ici une fonction.
- Le modèle de Malthus ne prend pas en compte la limitation des ressources naturelles.
  Verhulst, un mathématicien belge crée en 1838 un autre modèle pour lequel il fait l'hypothèse que plus la population augmente, plus l'accès au ressources naturelles est difficile, ce qui permet d'introduire une limite à la population terrestre. Il modélise donc l'évolution de la population par la fonction f vérifiant l'équation différentielle :

  $$y' = ay\left(1 - \frac{y}{k}\right)$$

  a et k étant deux réels.
- **Solow**, prix Nobel d'économie en 1987, s'intéresse à la modélisation de la croissance économique. Dans ces travaux intervient l'équation différentielle :

  $$y' = sy^{\alpha} - ay$$

  où $\alpha \in [0; 1], s \in]0; 1[$ et $a > 0$ sont donnés.
- Les équations différentielles sont aussi souvent utiliser pour étudier des systèmes vibratoires et par conséquent l'impact des vibrations sur les pièces d'un mécanisme.
- Un corps C dont T représente la température en fonction du temps t est voisin d'une source de chaleur à température constante T_0.
  En admettant qu'a chaque instant t, la variation de température de C est proportionnelle à

la différence $T(t) - T_0$, la température de C vérifiera l'équation différentielle :

$$y' = k(y - T_0)$$

C'est à dire que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $T'(t) = k(T(t) - T_0)$

- On les retrouvent aussi en électricité et en biologie.

2 Primitive

2 .1 Solution de $y' = f$

Définition

Soit F une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que F est une **primitive** d'une fonction f si F est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = f(x)$$

On dit alors que F est solution de l'équation différentielle :

$$y' = f$$

Exemples

- $F : x \mapsto x$ est une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$.
- $F : x \mapsto x^2 + 4$ et $G : x \mapsto = x^2$ sont deux primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par$f(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$.
- $F : x \mapsto \dfrac{x^6}{6} + \pi$ est une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par$f(x) = x^5$ dur $\mathbb{R}$.
- $F : x \mapsto \dfrac{(x+7)^4}{4}$ est une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+7)^3$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème (Admis)

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Théorèmes

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

- G est une primitive de f sur I, si et seulement si il existe un réel k tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = F(x) + k$$

- Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
  Il existe une et une seule primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$

Exemples

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x)$.

1. Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = x\ln(x) - x$ et dérivable sur cet ensemble est une primitive de f
2. En déduire la primitive de f qui s'annule en 1.

Démonstration

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
On a donc pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

- Démontrons que si G est une autre primitive de f sur I, alors il existe un réel $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) + k$
  Soient G une autre primitive de f sur I, et x un élément de I.
  On a donc par définition, $G'(x) = f(x)$.
  D'où $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ et par conséquent $G - F$ est une fonction constante.
  Il existe donc $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$:
  $(G - F)(x) = G(x) - F(x) = K$, et par conséquent :
  $$G(x) = F(x) + K$$
- Réciproquement, soient $K \in \mathbb{R}$ et G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = F(x) + K$
  On a alors pour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) = f(x)$
  Donc G est bien une primitive de f sur I.
- Et pour terminer, G est une primitive de f, si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ on a $G(x) = F(x) + K$, or :
  $G(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0) + K = y_0$
  $\qquad\qquad\ \ \Leftrightarrow K = y_0 - F(x_0)$
  Donc la fonction définie sur I par $G(x) = F(x) - F(x_0) + K$ est l'unique primitive de f telle que $F(x_0) = y_0$

Propriétés

Soit a et b deux réels et n un entier relatif **privé de** -1.

Fonction	Ensemble de définition	Primitive
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax + K$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \mathrm{e}^x$

Propriété

Soient f et g deux fonctions admettant respectivement les fonctions F et G sur I.

1. $F + G$ est alors une primitive de $f + g$ sir I
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λF est une primitive de λf sur I.

Démonstration

1. On a en effet pour tout $x \in I$, $(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$
2. On a en effet pour tout $x \in I$, $(\lambda F)'(x) = \lambda \times F'(x) = \lambda \times f(x) = (\lambda f)(x)$

2 .2 Solution de $y' = v' \times (u' \circ v)$

Propriété

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables respectivement sur les intervalles I et $J = v(I)$. La fonction définie sur I par $f(x) = v'(x) \times (u' \circ v)(x)$ admet $F(x) = (u \circ v)(x)$ comme primitive.

Démonstration

En effet, si u et v deux fonctions définies et dérivables respectivement sur les intervalles I et $J = v(I)$, alors pour tout $x \in I$ on a :

$$(u \circ v)'(x) = v'(x) \times (u' \circ v)(x)$$

Donc $F = u \circ v$ est une primitive de $v' \times u' \circ v$ sur I.

Exemple

f étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
On cherche une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x^2+2x-1}$.
Il n'existe par de formule permettant de déterminer une primitive d'un produit. On cherche donc une primitive de la forme $u \circ v$, c'est à dire deux fonctions u et v telles que pour tout x de I, $f(x) = v'(x) \times (u' \circ v)(x)$.
Vu la forme de la fonction f, la première idée est de poser $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x^2 + 2x - 1$.
Dans ce cas, $(u \circ v)'(x) = v'(x) \times (u' \circ v)(x) = (2x+2)\mathrm{e}^{x^2+2x-1}$.
On remarque que $(u \circ v)'(x) = 2f(x)$, donc $f(x) = \dfrac{1}{2}(u \circ v)'(x)$
Par conséquent la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{1}{2}(u \circ v)(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+2x+1}$ est une primitive de f.

Propriétés

Soit u une fonction définie et dérivable sur I et n un entier relatif différent de -1.

Fonction	Ensemble de définition	Primitive
$f(x) = u'(x) \times \big(u(x)\big)^n$	I si $n > 0$ et I avec $\forall x \in I, u(x) \neq 0$ si $n < 0$	$F(x) = \dfrac{\big(u(x)\big)^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	I avec $\forall x \in I, u(x) > 0$	$F(x) = \ln\big(u(x)\big)$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	I avec $\forall x \in I, u(x) > 0$	$F(x) = 2\sqrt{u(x)}$
$f(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$	I	$F(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$

3 Equations différentielles

3 .1 Généralité

Définition

On appelle équation différentielle du premier ordre toute équation reliant une fonction dérivable et sa dérivée.
On dit que la fonction f est solution de l'équation différentielle sur un intervalle I si elle vérifie l'équation.

Exemples

- L'équation de **Verhulst** modélisant l'évolution d'une population sous contrainte est l'équation différentielle :

$$(e): \quad y' = ay\left(1 - \frac{y}{k}\right)$$

a et k étant deux réels donnés.
la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+$ si pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(x) = af(x)\left(1 - \frac{f(x)}{k}\right)$$

- L'évolution du nombre d'individu en fonction du temps $N(t)$ d'une colonie de bactéries placée dans une enceinte close et dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence est solution de l'équation différentielle :

$$(E): \quad y' = 3y - 0,005y^2$$

C'est à dire que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$N'(t) = 3N(t) - 0,005 \times N(t)^2$$

Définition

Soient a un réel et f une fonction continue sur un intervalle .
L'équation différentielle $(E): \quad y' - ay = f$ est appelée **equation différentielle du premier ordre à coefficients constants**.
Dans ce cas, l'équation différentielle $(E_0): \quad y' - ay = 0$ est appelée **équation différentielle homogène associée à** (E).
(E_0) est une équation différentielle du premier ordre a coefficients constants **sans second membre** alors que (E) est une équation différentielle du premier ordre a coefficients constants **avec second membre**.

Exemple

$$(E): \quad y' - 2y = 2x\mathrm{e}^x$$

est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constant.
L'équation différentielle homogène associée à (E) est :

$$(E_0): \quad y' - 2y = 0$$

3 .2 Solution de l'équation $y' - ay = 0$

Théorème

Soit a un réel.
Les solutions de l'équation différentielle $(E_0): \quad y' - ay = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$ où C est un réel.
Autrement dit, y est une solution de l'équation différentielle (E_0) si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$.
Pour tout $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$, (E_0) a une unique solution f telle que $f(x_0) = y_0$.

Exemple

Les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' - 3y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{3x}$.
D'autre part, il existe une unique solution f de (E_0) telle que $f(1) = 3$.
Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = C\mathrm{e}^{3x}$
$f(1) = 3$ donc $C\mathrm{e}^{3\times 1} = 3$
D'où $C = 3\mathrm{e}^{-3}$
Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 3\mathrm{e}^{-3}\mathrm{e}^{x} = 3\mathrm{e}^{x-3}$$

Démonstration

- Soient C un réel et y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$
  Alors y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = Ca\mathrm{e}^{ax}$, d'où :
  $$\begin{aligned} y'(x) - ay(x) &= Ca\mathrm{e}^{ax} - aC\mathrm{e}^{ax} \\ &= 0 \end{aligned}$$
  $\boxed{\text{Donc } y \text{ est une solution de } (E_0)}$
- Soit y une solution de (E_0) et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = y(x)\mathrm{e}^{-ax}$
  g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
  $$\begin{aligned} g'(x) &= y'(x)\mathrm{e}^{-ax} - ay(x)\mathrm{e}^{-ax} \\ &= \left((y'(x) - ay(x)\right)\mathrm{e}^{-ax} \\ &= 0 \quad \text{car } y \text{ est solution de } (E_0) \end{aligned}$$
  Donc g est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ et par conséquent il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = C$.
  D'où :
  $$\begin{aligned} y(x) &= \frac{g(x)}{\mathrm{e}^{-ax}} \\ &= g(x) \times \mathrm{e}^{ax} \\ &\boxed{= C\mathrm{e}^{ax}} \end{aligned}$$

3 .3 Solution de l'équation $y' - ay = f$

Propriété

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, a un réel et (E) l'équation différentielle (E) définie par $y' - ay = f$.
Soit g une solution particulière de (E).
y est solution de (E) si et seulement si $y - g$ est solution de (E_0), ou (E_0) est l'équation homogène associée à (E), c'est à dire :
y est solution de $y' - ay = f$ si et seulement si $y - g$ est solution de $y' - ay = 0$
c'est à dire : y est solution de $y' - ay = f$ sur un intervalle I si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $y(x) = C\mathrm{e}^{xa} + g(x)$

Démonstration

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, a un réel et (E) l'équation différentielle (E) définie par $y' - ay = f$.
Soit g une solution particulière de (E).
On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) - ag(x) = f(x)$.

- Soit y une solution de (E).
  On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) - ay(x) = f(x)$, d'où $y'(x) - ay(x) = g'(x) - ag(x)$
  Par conséquent $y'(x) - g'(x) - a\left(y(x) - g(x)\right) = 0$
  $\boxed{\text{Donc } y - g \text{ est solution de } (E_0)}$
- Réciproquement, soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $y - g$ est solution de (E_0).
  On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) - g'(x) - a\left(y(x) - g(x)\right) = 0$ D'où $y'(x) - ay(x) = g'(x) - ag(x)$
  or g est une solution de (E), donc $g'(x) - ag(x) = f(x)$.
  Par conséquent $y'(x) - ay(x) = f(x)$
  $\boxed{\text{Donc } y \text{ est une solution de } (E)}$

Exemple

Soit (E) l'équation différentielle définie sur $y' - 2y = \mathrm{e}^x$

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\mathrm{e}^x$ est une solution particulière de (E)
2. En déduire l'ensemble des solution de (E).
3. Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 3$

Correction

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g'(x) = -\mathrm{e}^x$, donc :
   $g'(x) - 2g(x) = -\mathrm{e}^x - 2\left(-\mathrm{e}^x\right)$
   $= -\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x$
   $= \mathrm{e}^x$
   $\boxed{\text{Donc } g \text{ est bien une solution particulière de } (E)}$
2. D'après le cours, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) (noté (E_0)) est l'ensemble des fonctions y_0 définies par :
   $$y_0(x) = C\mathrm{e}^{2x}$$
   où $C \in \mathbb{R}$ Donc, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = y_0(x) + g(x)$
   C'est donc l'ensemble des fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}$, où $C \in \mathbb{R}$
3. Soit f l'unique solution de (E) telle que $f(0) = 3$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = C\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x$.
   or $f(0) = 3$ donc $C\mathrm{e}^{2\times 0} - \mathrm{e}^0 = 3$
   d'où $C - 1 = 3$ et par conséquent $C = 4$
   Donc $\boxed{f(x) = 4\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}$

Propriété Cas particulier : $y' - ay = b$

Soient a et b deux réels et (E) l'équation différentielle (E) définie par $y' - ay = b$.
L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$$

où $C \in \mathbb{R}$, c'est à dire :
y est solution de $y' - ay = b$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$$

Démonstration

Soient a et b deux réels et (E) l'équation différentielle (E) définie par $y' - ay = b$.
Cette equation différentielle est de la forme $y' - ay = f$ où f est la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = b$.
Il suffit donc de résoudre l'équation différentielle homogène(E_0) associée à (E) et de trouver une solution particulière de (E)

1. D'après le cours, y est solution de (E_0) : $y' - ay = 0$ si et seulement si il existe un réel C tel que $y = C\mathrm{e}^{ax}$
2. D'autre part, on remarque que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{-b}{a}$ est une solution de (E)
   En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$g'(x) = 0$ donc $g'(x) - ag(x) = 0 - a\dfrac{-b}{a} = b$

3. Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$$

où $C \in \mathbb{R}$

Exemple