

# TERMINALE MATHS EXPERT - INT6 : MATRICES

2023-2024

## Exercice 1

On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $u_n$  le nombre de fourmis, exprimé en milliers, dans cette population au bout du  $n$ -ième jour.

Au début de l'étude la colonie compte 5000 fourmis et au bout d'un jour elle compte 5100 fourmis. Ainsi, on a  $u_0 = 5$  et  $u_1 = 5,1$ .

On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour.

En d'autres termes, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9(u_{n+1} - u_n).$$

1. Démontrer, dans ces conditions, que  $u_2 = 5,19$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $V_{n+1} = AV_n$ .

(b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel,  $n$ ,  $V_n = A^n V_0$ .

(c) On pose  $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . On admet que la matrice  $P$  est inversible.

Déterminer la matrice  $P^{-1}$ .

Déterminer la matrice  $D$  définie par  $D = P^{-1}AP$ .

(d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on admet que

$$A^n = \begin{pmatrix} -10 \times 0,9^{n+1} + 10 & 10 \times 0,9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0,9^n + 10 & 10 \times 0,9^n - 9 \end{pmatrix}.$$

(e) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 6 - 0,9^n$ .

3. Calculer la taille de la colonie au bout du 10<sup>e</sup> jour. On arrondira le résultat à une fourmi près.

4. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ . Interpréter ce résultat dans le contexte.

## Exercice 2

**Joyeux anniversaire Cunégonde!!!**

La mère de mamie Marcelle, mémé Cunégonde, fête aujourd'hui ses 113 ans. elle est en effet né le 12 février 1911. Quel le jour de la semaine qui a vu naître Cunégonde ?