Application de la dérivation

Exercice 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 5x^2 - 3x + 4$$

2. g est la fonction dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et définie pour tout réel $x > 0$ par :

$$g(x) = 2\sqrt{x} - 3x + \frac{5}{x}$$

3. h est la fonction dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par :

$$h(x) = \sqrt{x}\big(2x+3\big)$$

4. m est la fonction dérivable sur $\left]-\infty;2\right[\cup \left]2;+\infty\right[$ et définie pour tout réel $x \neq 2$ par :

$$m(x) = \frac{2x^2+3}{x-2}$$

Exercice 2

1. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont le signe de la dérivée est donnée ci-dessous.
Recopier et compléter le tableau de variation de f avec les variations de f

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f					

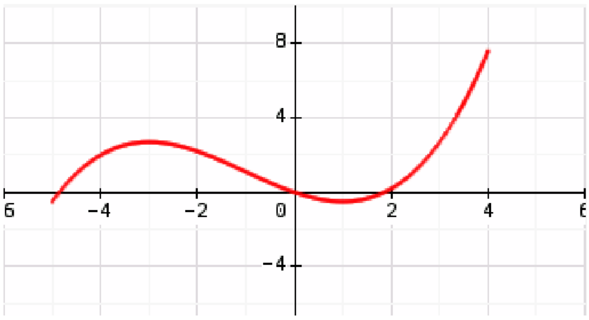
2. Soit g la fonction définie et dérivable sur $]-5;10]$ et dont les variations sont données ci-dessous.
Recopier et compléter le tableau de variations de f avec le signe de $f'(x)$

x	-5		7		10
$f'(x)$			0		
f		↗	$\sqrt{2}$	↘	

Exercice 3

Soit f la fonction définie et dérivable sur $[-5;5]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

1. Donner le tableau de signe de la dérivée f' de la fonction f.
2. Donner le tableau de variation de f.



Exercice 4

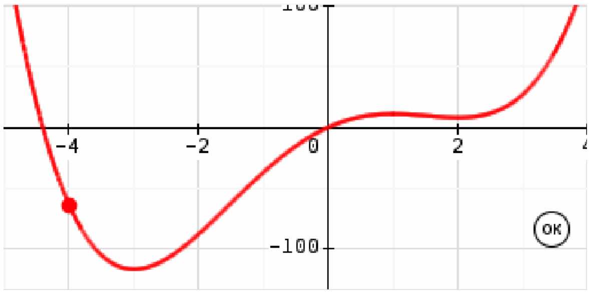
Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des réels par :

$$f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 7$$

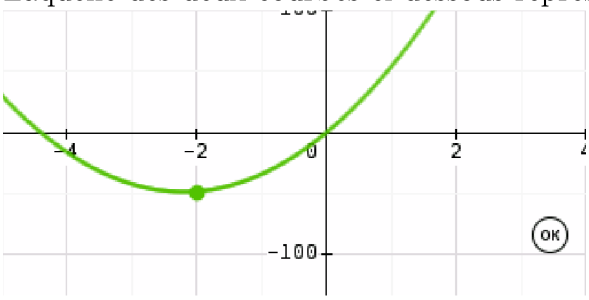
1. Calculer $f'(x)$
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de x sur $\mathbb{R}$
3. En déduire le tableau de variation de f.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

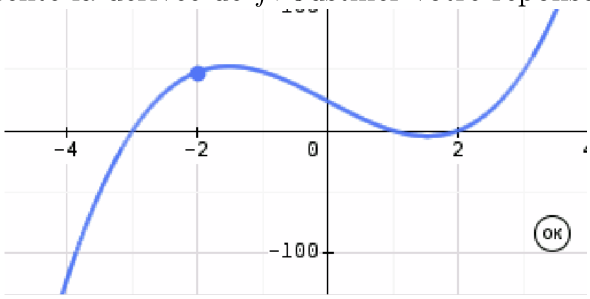
Exercice 5

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



Laquelle des deux courbes ci-dessous représente la dérivée de f. Justifier votre réponse.





Exercice 6

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \frac{x^2}{3} - x + 7$$

2. g est la fonction dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et définie pour tout réel $x > 0$ par :

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$$

3. h est la fonction dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par :

$$h(x) = \sqrt{x}\left(x^2 - 5\right)$$

4. m est la fonction dérivable sur $\left]-\infty;3\right[\cup \left]3;+\infty\right[$ et définie pour tout réel $x \neq 3$ par :

$$m(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 3}$$

Exercice 7

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{1}{x}$$

1. Calculer $f'(x)$
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de x sur $\mathbb{R}^*$

3. En déduire le tableau de variation de f.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

Exercice 8

tudiez les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x + 7$$

Exercice 9

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 2}{x - 2}$$

1. Donner en le justifiant l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f
2. On suppose que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$. Montrer que pour tout réel appartenant à $\mathcal{D}_f$, on a :
$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{(x - 2)^2}$$
3. Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de x sur l'ensemble de définition.
4. En déduire le tableau de variation de f.
5. f admet-elle un maximum sur $[0; 2[$? Si oui, donner ce maximum.

Exercice 10

Démontrer que la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ est supérieur ou égale à 2

Exercice 11

oit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 2x + 3$$

Etudier les variations de f.

Exercice 12

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 5$$

On note f' la dérivée de f et f'' celle de f'.

1. Calculer f'' et étudier son signe.
2. En Déduire les variations de f'
3. Calculer $f'(1)$, puis déduisez des questions précédentes le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Etudier enfin les variations de f.

Exercice 13

La hauteur d'un cône de révolution mesure 24 cm, et le rayon de sa base 8 cm. On veut inscrire dans ce cône un cylindre de révolution dont le volume V soit le plus grand possible.

1. Démontrer que la hauteur $h(r)$ du cylindre est donnée en fonction de r par :

$$h(r) = 3 \times (8 - r)$$

   Où r est le rayon de ce cylindre.

2. Déduisez-en que le volume $V(r)$ est défini en fonction de r sur $[0; 8]$ par :

$$V(r) = 3\pi r^2(8 - r)$$

3. Etudiez les variations de V puis déduisez-en la valeur de r pour laquelle $V(r)$ est maximale. Quelle est alors la hauteur h ?

Exercice 14

Généralement, la hauteur d'une casserole est approximativement égale à son rayon quelle que soit sa contenance.
Savez-vous pourquoi ?
Pour résoudre ce problème, on va chercher à trouver les dimensions d'une casserole de volume v telle que la quantité de métal soit minimal.
On note x le rayon du cercle du fond, h la hauteur et S l'aire totale, égale à l'aire latérale plus l'aire du fond.

1. (a) Démontrer que $h = \dfrac{v}{\pi x^2}$
   (b) La Démontrer que $S(x) = \pi x^2 + \dfrac{2v}{x}$
2. (a) Etudier les variations de la fonction S sur $[0; +\infty[$
   (b) En déduire que notre casserole doit avoir une hauteur égale à son rayon.

Exercice 15

Une cannette de soda contient 33cl. En considérant que cette canette est un cylindre fermé, quelle doivent être ses dimensions pour minimiser la quantité d'aluminium utilisée dans sa fabrication ?

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.
Dans un repère, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f.

1. Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.
2. Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à T sur un intervalle, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - (4x - 7)$$

(a) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.

(b) Quel est le signe de g sur $\left[-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$?

En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T sur $\left[-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$.

3. Calculer $g(-2)$. Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T sur $\left]-\infty;-\dfrac{2}{3}\right]$. Justifier.