Application de la dérivation

Exercice 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 5x^2 - 3x + 4$$

2. g est la fonction dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et définie pour tout réel $x > 0$ par :

$$g(x) = 2\sqrt{x} - 3x + \frac{5}{x}$$

3. h est la fonction dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par :

$$h(x) = \sqrt{x}\big(2x+3\big)$$

4. m est la fonction dérivable sur $\left]-\infty;2\right[\cup \left]2;+\infty\right[$ et définie pour tout réel $x \neq 2$ par :

$$m(x) = \frac{2x^2+3}{x-2}$$

Correction de l'exercice 1

Exercice 2

1. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont le signe de la dérivée est donnée ci-dessous.
   Recopier et compléter le tableau de variation de f avec les variations de f

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f					

2. Soit g la fonction définie et dérivable sur $]-5;10]$ et dont les variations sont données ci-dessous.
   Recopier et compléter le tableau de variations de f avec le signe de $f'(x)$

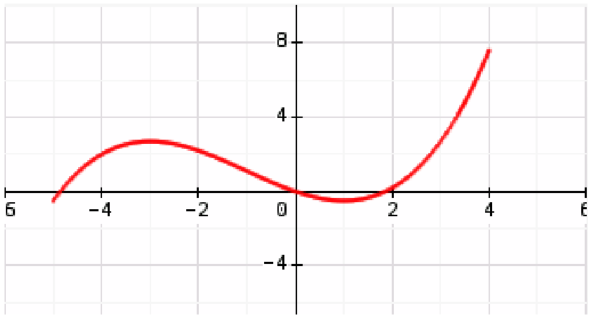
x	-5		7		10
$f'(x)$			0		
f		↗	$\sqrt{2}$	↘	

Correction de l'exercice 2

Exercice 3

Soit f la fonction définie et dérivable sur $[-5;5]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

1. Donner le tableau de signe de la dérivée f' de la fonction f.
2. Donner le tableau de variation de f.



Correction de l'exercice 3

Exercice 4

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des réels par :

$$f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 7$$

1. Calculer $f'(x)$
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de x sur $\mathbb{R}$
3. En déduire le tableau de variation de f.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

Correction de l'exercice 4

1. $f'(x) = 12x^2 - 18x - 12 = 6\left(2x^2 - 3x + 2\right)$
2. $2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0$, donc 2 est une racine de f' et par conséquent :

$$f'(x) = (x-2)(12x+6) = 6(x-2)(2x+1)$$

On à donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		2		$+\infty$
6		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

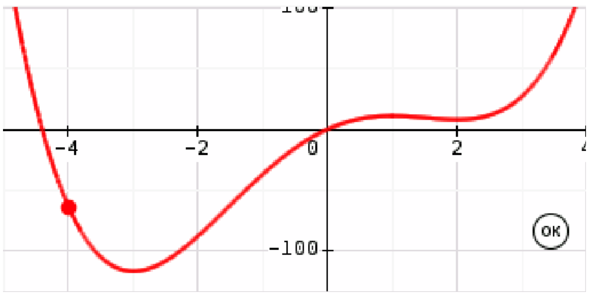
3. On déduit de la question précédente les variation de f.

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f			$\frac{41}{4}$		-21		

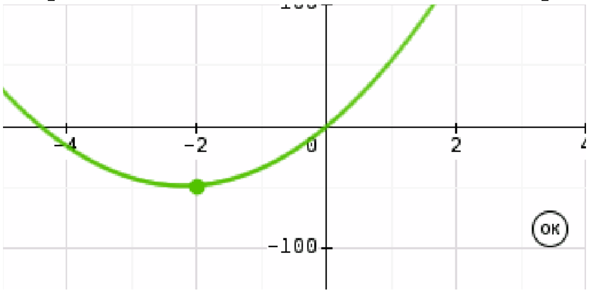
4. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 à pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$
   avec $f'(0) = 12 \times O^2 - 18 \times 0 - 12 = -12$
   et $f(0) = 4 \times 0^3 - 9 \times 0^2 - 12 \times 0 + 7 = 7$
   D'où l'équation de la tangente :
   $y = -12(x-0) + 7$
   $y = -12x + 7$

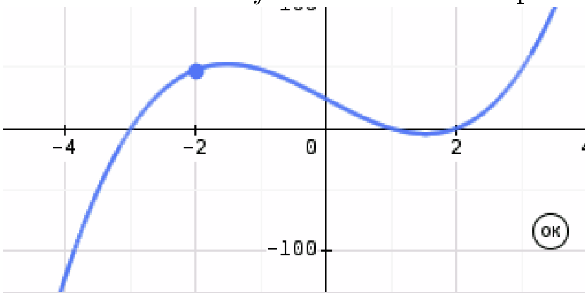
Exercice 5

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



Laquelle des deux courbes ci-dessous représente la dérivée de f. Justifier votre réponse.





Correction de l'exercice 5

Exercice 6

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \frac{x^2}{3} - x + 7$$

2. g est la fonction dérivable sur $\left]0; +\infty\right[$ et définie pour tout réel $x > 0$ par :

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$$

3. h est la fonction dérivable sur $\left]0; +\infty\right[$ et définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par :

$$h(x) = \sqrt{x}\left(x^2 - 5\right)$$

4. m est la fonction dérivable sur $\left]-\infty; 3\right[\cup \left]3; +\infty\right[$ et définie pour tout réel $x \neq 3$ par :

$$m(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 3}$$

Correction de l'exercice 6

Exercice 7

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{1}{x}$$

1. Calculer $f'(x)$
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de x sur $\mathbb{R}^*$
3. En déduire le tableau de variation de f.

4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

Correction de l'exercice 7

1. $f'(x) = 2 - \left(\frac{-1}{x^2}\right) = 2 + \frac{1}{x^2}$
2. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
3. On déduit de la question précédente le tableau de variation de f.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
f	$\nearrow$	||	$\nearrow$

4. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

avec $f'(1) = 2 + \frac{1}{1^2} = 3$ et $f(1) = 2 \times 1 - \frac{1}{1} = 1$ d'où l'équation de la tangente :

$$y = 3x - 2$$

Exercice 8

tudiez les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x + 7$$

Correction de l'exercice 8

Exercice 9

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 2}{x - 2}$$

1. Donner en le justifiant l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f
2. On suppose que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$. Montrer que pour tout réel appartenant à $\mathcal{D}_f$, on a :

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{(x-2)^2}$$

3. Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de x sur l'ensemble de définition.
4. En déduire le tableau de variation de f.

5. f admet-elle un maximum sur $[0;2[$? Si oui, donner ce maximum.

Correction de l'exercice 9

Exercice 10

Démontrer que la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ est supérieur ou égale à 2

Correction de l'exercice 10

on a pour tout réel $x\in]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{x}\geq 2 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}\geq 2\\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}\geq 2\\ &\Leftrightarrow x^2+1\geq 2x\\ &\Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0 \end{aligned}$$

Or un carré est toujours positif, donc pour tout $x\in]0;+\infty[$, $(x-1)^2\geq 0$ est vrai et par conséquent, d'après l'équivalence, $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ est aussi vrai.

Exercice 11

oit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-2x^3-\frac{7}{2}x^2-2x+3$$

Etudier les variations de f.

Correction de l'exercice 11

Exercice 12

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^4-2x^3+2x^2-2x+5$$

On note f' la dérivée de f et f'' celle de f'.

1. Calculer f'' et étudier son signe.
2. En Déduire les variations de f'
3. Calculer $f'(1)$, puis déduisez des questions précédentes le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Etudier enfin les variations de f.

Correction de l'exercice 12

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ est on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 2\times 3x^2 + 2\times 2x - 2 \\ &= 4x^3 - 6x^2 + 4x - 2 \end{aligned}$$

f' est aussi une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4\times 3x^2 - 6\times 2x^+4 \\ &= 12x^2 - 12x + 4 \end{aligned}$$

2. Pour étudier les variations de f', on étudie le signe de sa dérivée, c'est à dire de f''.
$f''(x) = 12x^2 - 12x + 4$, donc f'' est une fonction polynôme du second degré.
Soit Δ son discriminent.
$\Delta = (-12)^2 - 4\times 12\times 4 = -48$.
$\Delta < 0$ donc f'' est toujours du signe de son coefficient du terme de degré 2, donc $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et par conséquent f' est strictement croissante sur cet intervalle.
3. $f'(1) = 4\times 1^3 - 6\times 1^2 + 4\times 1 - 2 = 4 - 6 + 4 - 2 = 0$.
Donc, d'après la question précédente, f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 1, donc $f'(x) < 0$ est pour $x \in]-\infty; 0[$ et $f'(x) > 0$ pour $]0; +\infty[$
4. On peut déduire de la question précédente le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f		$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice 13

La hauteur d'un cône de révolution mesure 24 cm, et le rayon de sa base 8 cm. On veut inscrire dans ce cône un cylindre de révolution dont le volume V soit le plus grand possible.

1. Démontrer que la hauteur $h(r)$ du cylindre est donnée en fonction de r par :

$$h(r) = 3\times(8 - r)$$

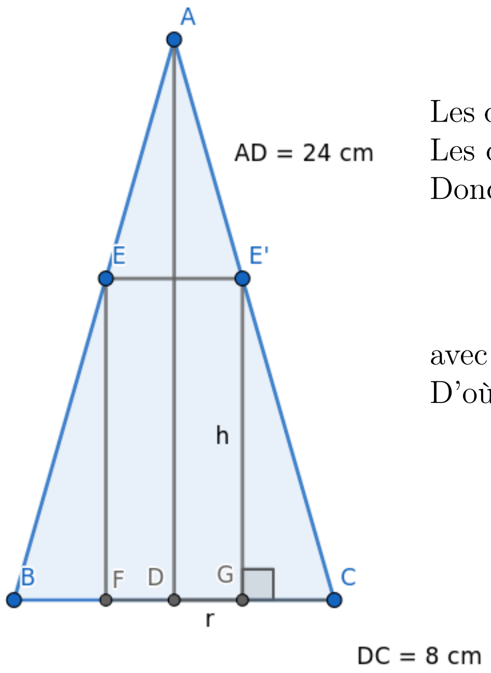
Où r est le rayon de ce cylindre.
2. Déduisez-en que le volume $V(r)$ est défini en fonction de r sur $[0; 8]$ par :

$$V(r) = 3\pi r^2(8 - r)$$

3. Etudiez les variations de V puis déduisez-en la valeur de r pour laquelle $V(r)$ est maximale. Quelle est alors la hauteur h ?

Correction de l'exercice 13

1. L'image suivante illustre le problème.



Les droites droites (AE') et (DG) sont sécantes en C.
Les droites (AD) et $(E'G)$ sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{E'G}{AD} = \frac{CG}{CD}$$

avec $AD = 24$, $E'G = h$, $CD = 8$ et $CG = 8 - r$
D'où

$$\frac{h(r)}{24} = \frac{8-r}{8}$$

$$h(r) = 24 \times \frac{8-r}{8}$$

$$h(r) = 3 \times (8-r)$$

2. Le volume d'un cylindre est donné par l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, donc :

$$V(r) = \pi r^2 h(r) = \pi r^2 3 \times (8-r) = 3\pi r^2(8-r)$$

3. $V(r) = 3\pi r^2(8-r) = 24\pi r^2 - 3\pi r^3$ défini une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\begin{array}{rcl} V'(r) & = & 24\pi \times 2r - 3\pi \times 3r^2 \\ & = & 48\pi r - 9\pi r^2 \\ & = & \pi r \times (48 - 9r) \end{array}$$

de plus

$$\begin{array}{rcl} 48 - 9r > 0 & \Leftrightarrow & 48 > 9r \\ & \Leftrightarrow & \frac{48}{9} > r \\ & \Leftrightarrow & \frac{16}{3} > r \end{array}$$

d'où le tableau de variation suivant :

r	0		$\frac{16}{3}$		$+\infty$
signe de r		$+$		$+$	
signe de $48 - 9r$		$+$	0	$-$	
signe de $V'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de V		$\nearrow$		$\searrow$	

Le volume est donc maximal pour un rayon du cylindre $r_0 = \dfrac{16}{3} \approx 5,33cm$.
La hauteur du cylindre est donc :

$$\begin{aligned} h_0 &= 3 \times (8 - r_0) \\ &= 3 \times \left(8 - \frac{16}{3}\right) \\ &= 3 \times \left(\frac{8}{3}\right) \\ &= 8 \end{aligned}$$

Exercice 14

Généralement, la hauteur d'une casserole est approximativement égale à son rayon quelle que soit sa contenance.
Savez-vous pourquoi ?
Pour résoudre ce problème, on va chercher à trouver les dimensions d'une casserole de volume v telle que la quantité de métal soit minimal.
On note x le rayon du cercle du fond, h la hauteur et S l'aire totale, égale à l'aire latérale plus l'aire du fond.

1. (a) Démontrer que $h = \dfrac{v}{\pi x^2}$

   (b) La Démontrer que $S(x) = \pi x^2 + \dfrac{2v}{x}$

2. (a) Etudier les variations de la fonction S sur $[0; +\infty[$

   (b) En déduire que notre casserole doit avoir une hauteur égale à son rayon.

Correction de l'exercice 14

1. (a) Le volume d'un cylindre de révolution est le produit de la surface de la base par la hauteur, donc : $v = \pi x^2 \times h$, d'où $h = \dfrac{v}{\pi x^2}$

   (b) l'aire total S de métal est égale à l'aire latérale plus l'aire du fond avec :
   - L'aire du fond est égale à πx^2
   - L'aire latérale peut être considéré comme un rectangle de longueur celle d'un cercle de rayon x qui est égale à $2\pi x$, et de hauteur h.
     D'où une aire latérale de $2\pi x \times h$

   donc $S(x) = \pi x^2 + 2\pi x \times h$
   or, d'après la question précédente, $h = \dfrac{v}{\pi x^2}$
   donc $S(x) = \pi x^2 + 2\pi x \times \dfrac{v}{\pi x^2} = \pi x^2 + \dfrac{2v}{x}$

2. (a) S est une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ avec :

$$\begin{aligned} S'(x) &= \pi \times 2x + 2v \times \frac{-1}{x^2} \\ &= 2 \times \left(\pi x - \frac{v}{x^2}\right) \\ &= 2 \times \left(\frac{\pi x^3}{x^2} - \frac{v}{x^2}\right) \\ &= 2 \times \left(\frac{\pi x^3 - v}{x^2}\right) \end{aligned}$$

d'autre part, pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} \pi x^3 - v > 0 &\Leftrightarrow \pi x^3 > v \\ &\Leftrightarrow x^3 > \frac{v}{\pi} \\ &\Leftrightarrow x > \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}} \end{aligned}$$

d'où le tableau de variation suivant :

x	0		$\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$		$+\infty$
signe de $\pi x^3 - v$		$-$	0	$+$	
signe de x^2		$+$		$+$	
signe de $S'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de S		$\searrow$		$\nearrow$	

(b) D'après l'étude et le tableau de variation précédent, la surface de métal utilisée est minimale pour un rayon x_0 tel que $x_0^3 = \frac{v}{\pi}$ d'où un volume $v = \pi x_0^3$.
Donc, d'après la question 1, la hauteur permettant d'optimiser la surface de métal utilisée pour un volume donné est :
$h_0 = \frac{v}{\pi x_0^2} = \frac{\pi x_0^3}{\pi x_0^2} = x_0$

Exercice 15

Une cannette de soda contient 33cl. En considérant que cette canette est un cylindre fermé, quelle doivent être ses dimensions pour minimiser la quantité d'aluminium utilisée dans sa fabrication ?

Correction de l'exercice 15

- Al correspond à un volume de 1 dm^3, donc le volume en litre d'un cylindre de révolution est le produit de la surface en dm^2 de la base par la hauteur en dm, donc : $0,33 = \pi r^2 \times h$, d'où $h = \frac{0,33}{\pi r^2}$ où r est le rayon de la base et h sa hauteur en dm.
- l'aire total S de métal en dm^2 est égale à l'aire latérale plus l'aire du fond plus l'aire du couvercle avec :
  - ∗ L'aire du fond ainsi que celle du couvercle sont égales à πr^2
  - ∗ L'aire latérale peut être considéré comme un rectangle de longueur celle d'un cercle

de rayon r qui est égale à $2\pi r$, et de hauteur h.
D'où une aire latérale de $2\pi r \times h$
donc $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \times h$
or, $h = \dfrac{v}{\pi r^2}$
donc $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \dfrac{0,33}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{0,66}{r}$
S est une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a :

$$\begin{aligned} S'(x) &= 2\pi \times 2r + 0,66 \times \frac{-1}{r^2} \\ &= 4\pi r - \frac{0,66}{r^2} \\ &= \frac{4\pi r^3}{r^2} - \frac{0,66}{r^2} \\ &= \frac{4\pi r^3 - 0,66}{r^2} \end{aligned}$$

d'autre part, pour tout réel $r > 0$,

$$\begin{aligned} 4\pi r^3 - 0,66 > 0 &\Leftrightarrow 4\pi r^3 > 0,66 \\ &\Leftrightarrow r^3 > \frac{0,66}{4\pi} \\ &\Leftrightarrow r > \sqrt[3]{\frac{0,66}{4\pi}} \end{aligned}$$

d'où le tableau de variation suivant :

r	0		$\sqrt[3]{\frac{0,66}{4\pi}}$		$+\infty$
signe de $4\pi r^3 - 0,66$		$-$	0	$+$	
signe de r^2		$+$		$+$	
signe de $S'(r)$		$-$	0	$+$	
Variation de S		$\searrow$		$\nearrow$	

D'après l'étude et le tableau de variation précédent, la surface de métal $S(r)$ utilisée est minimale pour un rayon r_0 tel que $r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{0,66}{4\pi}} \approx 0,37dm$ soit $3,7cm$ et une hauteur de $h_0 = \dfrac{0,33}{\pi r_0^2} \approx 0,75dm$ soit $h_0 \approx 7,5cm$.

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.
Dans un repère, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f.

1. Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.
2. Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à T sur un intervalle, on considère la

fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - (4x - 7)$$

(a) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.

(b) Quel est le signe de g sur $\left[-\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$?

En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T sur $\left[-\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$.

3. Calculer $g(-2)$. Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T sur $\left]-\infty; -\dfrac{2}{3}\right]$. Justifier.

Correction de l'exercice 16

1. la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 a pour équation :

$$y = f'(2) \times (x - 2) + f(2)$$

avec $f'(x) = 3x^2 - 4x$ d'où $f'(2) = 4$ et $f(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 + 1 = 1$
D'où l'équation de T :

$$\begin{array}{rcl} y & = & 4 \times (x - 2) + 1 \\ y & = & 4x - 7 \end{array}$$

2. $g(x) = f(x) - (4x - 7) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

(a) $g'(x) = 3x^2 - 4x - 4$
2 est une racine évidente de la fonction polynôme g' car $g'(2) = 0$, donc $g'(x) = (x - 2)(3x + 2)$. De plus :

$$\begin{aligned} 3x + 2 > 0 &\Leftrightarrow 3x > -2 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

et

$$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-2}{3}$		2		$+\infty$
$x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$g(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 - 4 \times 2 + 8 = 0$

(b) D'après le tableau de variation précédent, g est positive sur $\left[-\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$, d'où pour tout $x \in \left[-\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$:

$$\begin{gathered} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) - (4x - 7) \geqslant 0 \\ f(x) \geqslant 4x - 7 \end{gathered}$$

Donc $\mathcal{C}$ est au dessus de T sur $\left[-\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$.

3. $g(-2) = (-2)^3 - 2 \times (-2)^2 - 4 \times (-2) + 8 = 0$.

   Or, d'après le tableau de variation, g est strictement croissante sur $\left]-\infty; -\dfrac{2}{3}\right]$, donc $g(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; -2[$ et $g(x) > 0$ pour $x \in \left]-2; -\dfrac{2}{3}\right]$, donc $\mathcal{C}$ est en dessous T sur $]-\infty; -2[$ et au dessus de T sur $\left]-2; -\dfrac{2}{3}\right]$.