Fonction dérivée

1 Dérivée des fonctions de références

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{I}$
On dit que f est dérivable sur $\mathcal{I}$ si elle est dérivable en tout point de $\mathcal{I}$.
Dans ce cas, la fonction qui à tout x de $\mathcal{I}$ associe $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f. On la note f'.

Soit a et b deux réels et n un entier relatif non nul.

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée	ensemble de dérivabilité
$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$

2 Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions

Soit u et v deux fonctions définie sur un intervalle I et (a, b) un couple de réels. La fonction f définie dans le tableau suivant est dérivable sur I dans tout les cas suivants :

Fonction	Dérivée
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = a \times u(x)$	$f'(x) = a \times u'(x)$
$f(x) = u(x) \times v(x)$	$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad$ d'où $\quad f'(x) = (u'v + uv')(x)$
$f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ et $u(x) \neq 0$ sur I	$f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{(u(x))^2} \quad$ d'où $\quad f'(x) = \left(\dfrac{-u'}{u^2}\right)(x)$
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ et $v(x) \neq 0$ sur I	$f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \quad$ d'où $\quad f'(x) = \left(\dfrac{u'v - uv'}{v^2}\right)(x)$
$f(x) = u(ax + b)$ tel que $ax + b \in I$	$f'(x) = a \times u'(ax + b)$

3 Application de la dérivation

Propriétés

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $[a;b]$.

- Si $f'(x)$ est strictement positif pour tout $x \in \left[a;b\right]$ sauf éventuellement en un nombre dénombrable de réel pour lesquels elle s'annule, alors f est strictement croissante sur $\left[a;b\right]$. (réciproquement, Si f est strictement croissante sur $[a;b]$, alors $f'(x)$ est strictement positif pour tout $x \in \left[a;b\right]$ sauf éventuellement en un nombre dénombrable de réel pour lesquels elle s'annule)
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \left[a;b\right]$, alors f est constante sur $\left[a;b\right]$. (la réciproque de cette propriété est aussi vraie)
- Si $f'(x)$ est strictement négatif pour tout $x \in \left[a;b\right]$ sauf éventuellement en un nombre dénombrable de réel pour lesquels elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur $\left[a;b\right]$. (réciproquement, Si f est strictement décroissante sur $[a;b]$, alors $f'(x)$ est strictement négatif pour tout $x \in \left[a;b\right]$ sauf éventuellement en un nombre dénombrable de réel pour lesquels elle s'annule)