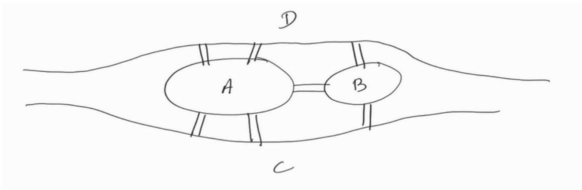
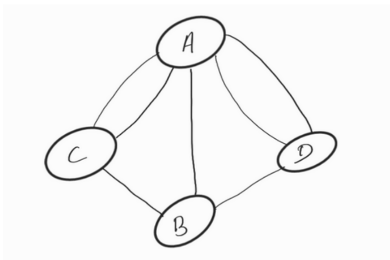
Théorie des graphes - introduction

Exercice 1

Les sept ponts de Köningsberg
La ville de Köningsberg en pruse est construite sur deux îles relié par 7 ponts comme dans le schéma ci-dessous.



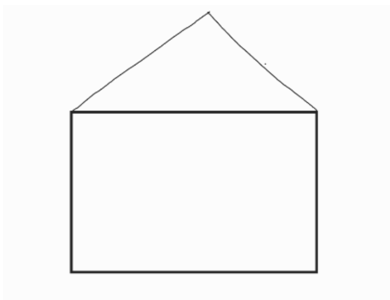
On peut représenter cette situation par le graph suivant :



Une question a animé les intellectuels du XVIII, celle de trouver un chemin quelconque, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et revenir à son point de départ.
La réponse à cette question à été trouver par Léonard Euler (1707-1783). A vous...

Exercice 2

Peut-on dessiner la maison ci-dessous sans lever le crayon et sans jamais repasser deux fois sur le même trait ?

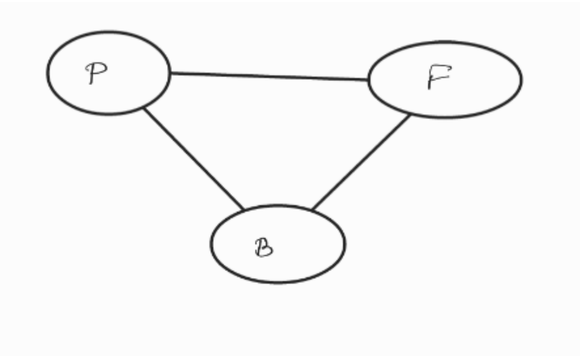


Exercice 3

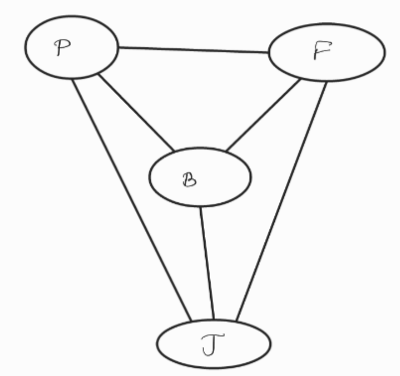
Exercice tiré de "L'agrapheur" de Alain Hertz : la villa
Courtel décrit sa villa.
- Dans cette villa, il y a trois pièces, deux grandes chambres, l'une pour Francoise et moi, et l'autre pour les enfants. entre les deux chambres, nous disposons d'une salle de bains....
...nous donnons sur le jardin de l'hôtel ... avec un bout de jardin privé pour notre villa. Pour sortir de l'hôtel, on peut tout simplement traverser le jardin et franchir un portail qui donne sur l'extérieur. Nous n'avons pas besoin de nous rendre à la réception.
... il y a des fenêtres partout qui illuminent notre appartement. Chacune des deux chambres à coucher a une fenêtre qui donne sur l'extérieur de l'hôtel et une fenêtre qui donne sur le jardin, et il en est de même dans la salle de bains.
- Devez-vous passer par la chambre des filles pour aller dans la salle de bains, ou est-ce le contraire ?
- Ni l'un ni l'autre, chaque chambre a un accès direct à la salle de bains.
- Et je parie que tu vas me dire que les deux chambres, celle des filles et la vôtre, communiquent entre elles.
- Exactement. »
Je prends le temps de réfléchir, 10 secondes, pour finalement m'exclamer. « Eh bien !, dis donc, tu ne m'avais pas dit que ta villa était sur deux étages.
- Pas du tout, tu te trompes, on est tous de plain-pied, sur le même niveau."
Je déclare alors en souriant : « Mon cher Sébastien, tu fais vraiment honneur à la réputation des Marseillais. Tu l'aimes tellement ta villa que tu n'as pas pu t'empêcher d'exagérer un peu dans sa description.
- Mais pas du tout, Maurice, je n'ai dit que la vérité. Viens voir par toi-même si tu ne me crois pas.
- Je n'en ferai rien pour deux raisons. Premièrement, je ne veux pas déranger ta petite famille qui doit s'y trouver actuellement. Deuxièmement, je n'ai pas besoin de m'y rendre pour savoir qu'aucune villa ne peut correspondre à la description que tu m'as donnée. »

Correction de l'exercice 1

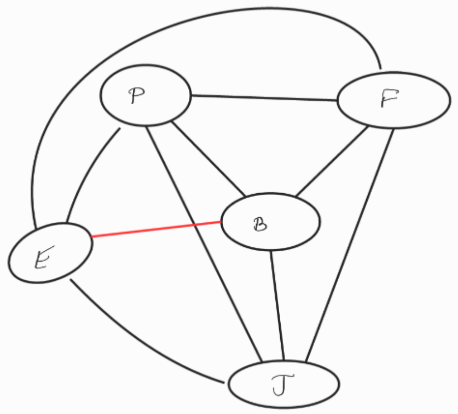
Maurice prend alors son carnet et dessine trois sommets représentant les trois pièces de la villa de Courtel. Il utilise la lettre P pour la chambre des parents, F pour celle des filles et B pour la salle de bain.
Je relie deux sommet par une arrête lorsque les pièces correspondantes ont un sommet en commun. j'obtiens donc le triangle suivant .



On rajoute le jardin et on modifie la définition d'une arrête en disant que deux sommets sont reliés s'il existe une porte ou une fenêtre séparant les deux endroits.



On termine en mettant l'extérieur de l'hôtel ou chaque pièce P, F et B a une fenêtre qui donne sur l'extérieur et qu'un portail au fond du jardin permet de s'y rendre.



Exercice 4

Exercice tiré de "L'agrapheur" de Alain Hertz : Une voiture nous attend

- C'est l'histoire de quatre compagnons de cellule qui ont décidé de s'évader. Pour ce faire, ils ont creusé un tunnel qui se rend de leur cellule jusqu'à la route qui borde le mur d'enceinte de la prison. .... L'évasion est prévue pour ce soir et il n'ont qu'une lampe de poche.

... La seule facon pour les prisonniers de s'évader est de faire le trajet tout d'abord avec deux personnes. Lune des deux revient ensuite avec la lampe de poche. À nouveau, deux détenus empruntent le tunnel et une personne revient avec la lampe de poche pour amener avec elle le dernier compagnon de cellule.

Les quatre prisonniers n'ont pas tous le même âge et certains ne sont pas en très bonne santé. Si je te dis cela, c'est parce que chacun mettrait un temps différent pour traverser le tunnel s'il était seul avec une lampe de poche. Ces temps sont de 1, 2 ,5 et 10 minutes.

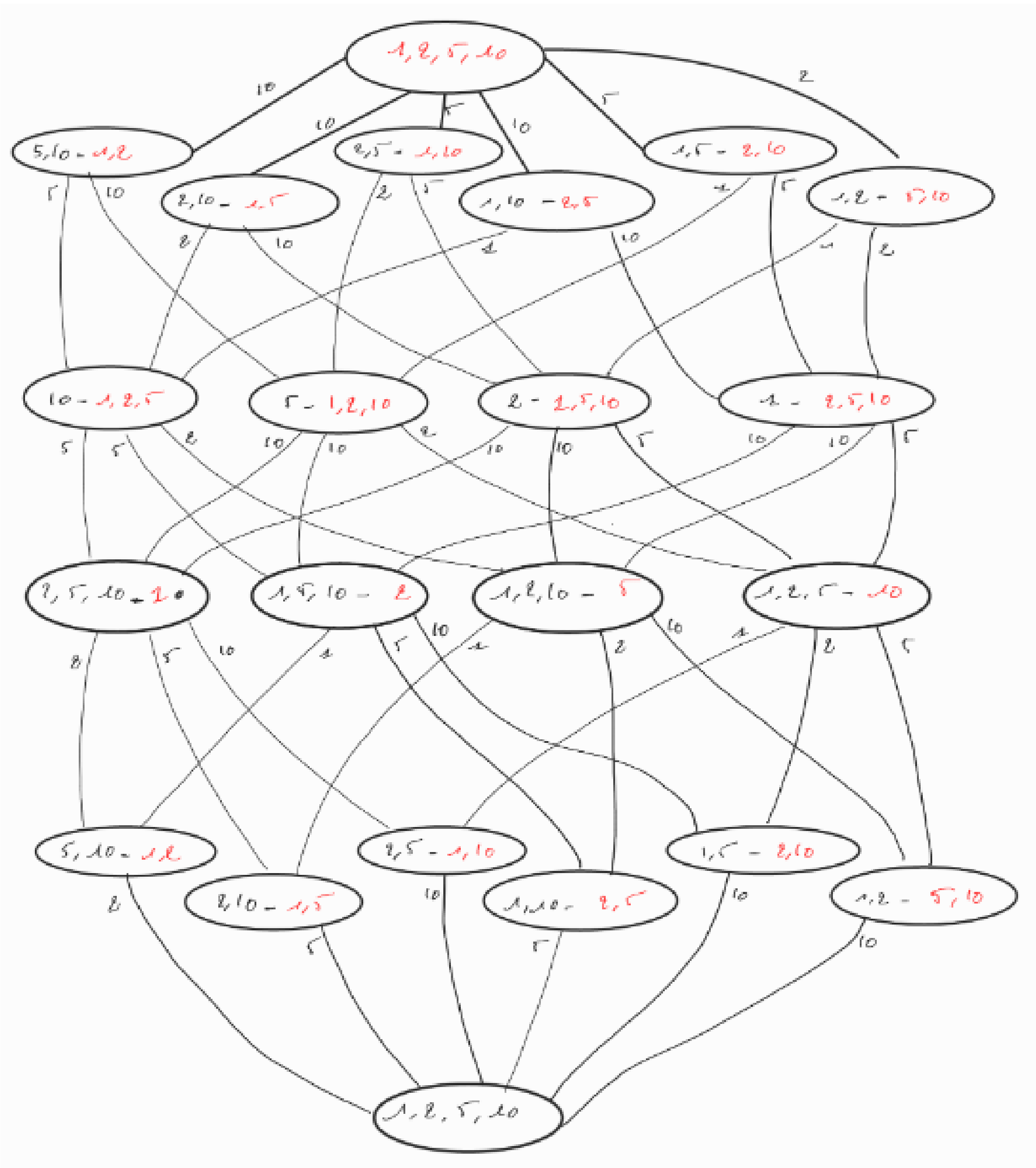
Le plus rapide s'adapte au rythme du plus lent. Ainsi, par exemple, si celui qui a besoin de dix minutes voyage avec le camarade de cellule le plus rapide, ils feront la traversée en dix minutes.

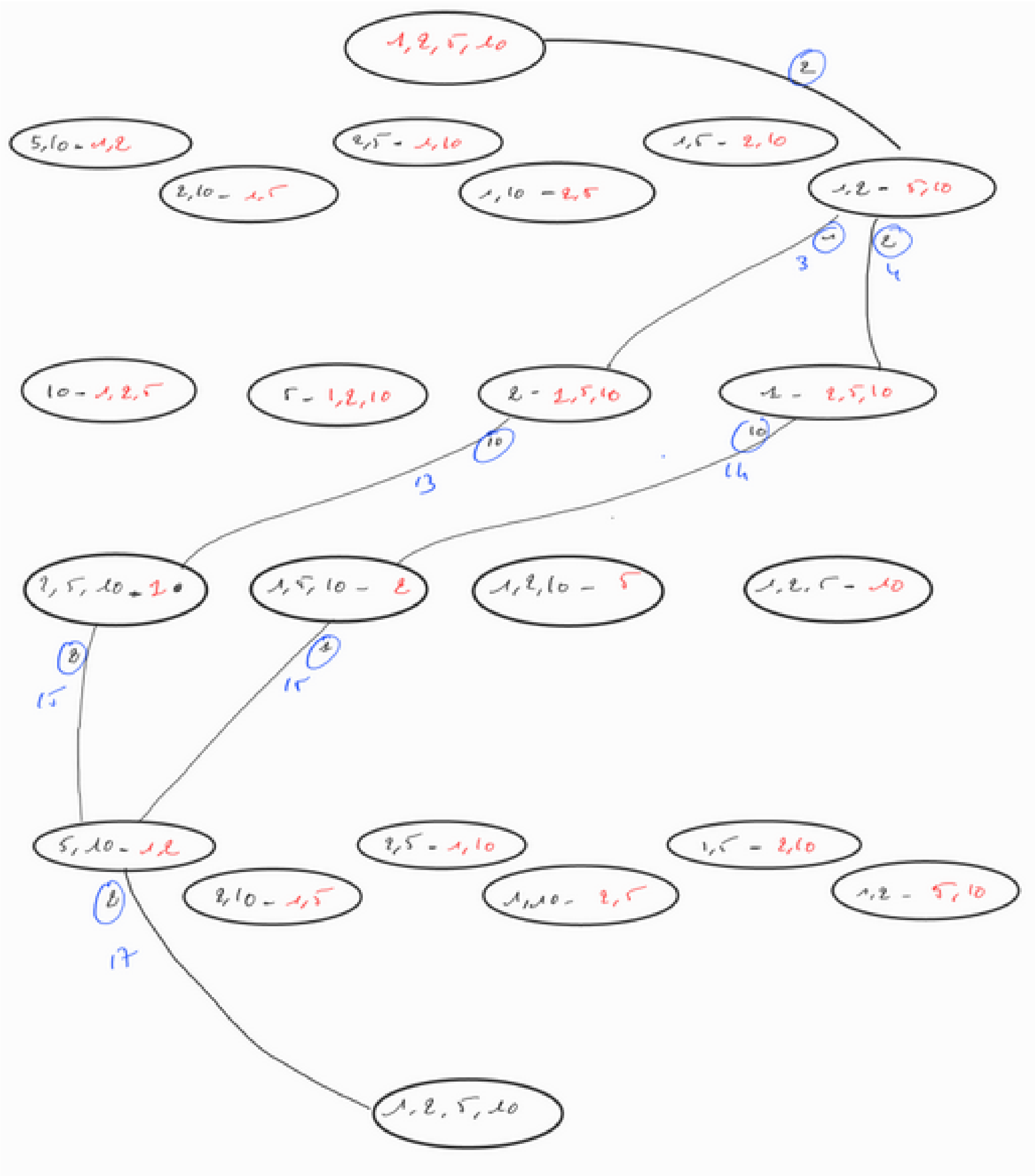
La prison est sous haute surveillance. Des gardes font leur ronde 24 heures sur 24 et passent devant chaque cellule à intervalle régulier, toutes les 17 minutes.

Les prisonniers n'ont donc que 17 minutes pour s'enfuir, ou du moins pour se rendre jusqu'à la voiture où les attend leur complice.

La question est de savoir comment les prisonniers peuvent rejoindre la voiture de leur complice en au plus 17 minutes, pas une de plus.

Correction de l'exercice 2





Exercice 5

rois enfants A, B et C jouent à la balle.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n, B_n et C_n les événements suivants :

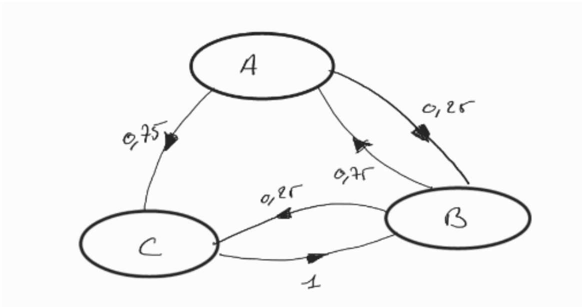
1. A_n : "L'enfant A à la balle après n lancers"
2. B_n : "L'enfant B à la balle après n lancers"
3. C_n : "L'enfant C à la balle après n lancers"

On a :

1. la probabilité que l'enfant A envoie la balle à l'enfant B est de 0,25.
2. la probabilité que l'enfant C envoie la balle à l'enfant B est de 1
3. la probabilité que l'enfant B envoie la balle à l'enfant A est de 0,75.
4. la probabilité que l'enfant A envoie la balle à l'enfant C est de 0,75.

5. la probabilité que l'enfant B envoie la balle à l'enfant C est de 0,25.

On note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.
Le jeux est modélisé par le graphe probabiliste suivant :



1. $\{A_n, B_n, C_n\}$ étant un système complet d'événement et en utilisant la formule des probabilité totale, montrer que :
   - $a_{n+1} = 0 \times a_n + 0,75 \times b_n + 0 \times c_n$
   - $b_{n+1} = 0,25 \times a_n + 0 \times b_n + 1 \times c_n$
   - $c_{n+1} = 0,75 \times a_n + 0,25 \times b_n + 0 \times c_n$
2. Soit X_n le vecteur définie par :
$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$
   Donner une matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$

Correction de l'exercice 3

Exercice 6

Pendant une soirée au château de Moulinsart, au cours de laquelle plusieurs visiteurs se sont succédés à différents horaires, Bianca Castafiore s'est fait voler un précieux coffre à bijoux... Le voleur a subtilisé discrètement la clef de la chambre de la Castafiore (qui se trouvait dans une poche de son manteau posé au salon), il s'est absenté pour commettre le délit et il est revenu dans le salon pour remettre la clef à sa place. Tintin, qui tente de faire la lumière sur cette affaire, contacte le lendemain tous les invités, et tous lui affirment ne jamais avoir quitté le salon pendant la durée de leur visite. Il leur demande enfin qui ils avaient rencontré au salon, et note leurs réponses :

- Tournesol a vu Dupond, Dupont, Irma et Lampion,
- Dupond a vu Tournesol, Dupont, Haddock, Irma et Nestor,
- Dupont a vu Tournesol, Dupond et Haddock,
- Haddock a vu Dupond, Dupont et Irma,
- Irma a vu Tournesol, Dupond, Haddock et Nestor,
- Lampion a vu Tournesol et Nestor,
- Nestor a vu Dupond, Irma et Lampion.

Muni de ces informations, Tintin pourra-t-il démasquer le coupable ?

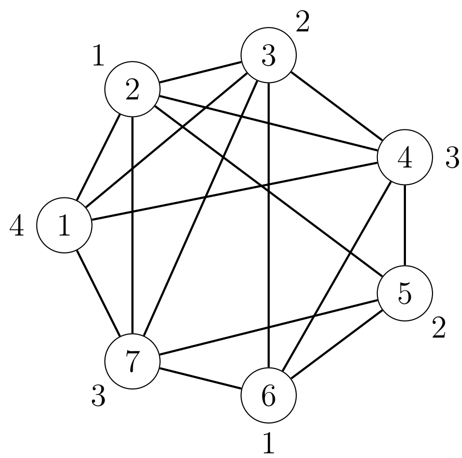
Correction de l'exercice 4

Exercice 7

Un lycée doit organiser un examen composé de 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numéroté de 1 à 7, sachant que les paires de cours suivantes ont des étudiants en communs : $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{1;4\}$, $\{1;7\}$, $\{2;3\}$, $\{2;4\}$, $\{2;5\}$, $\{2;7\}$, $\{3;4\}$, $\{3;6\}$, $\{3;7\}$, $\{4;5\}$, $\{4;6\}$, $\{5;6\}$, $\{5;7\}$ et $\{6;7\}$.
Comment organiser ces épreuves sur une durée minimale ?

Correction de l'exercice 5

En appliquant l'algorithme de coloration DSATUR au graphe d'incompatibilité suivant donné par l'énoncé, on obtient le résultat décrit ci-dessous :



D'autre part, on remarque que les sommets 1, 2, 3 et 4 forment une clique, donc l'indice chromatique du graphe est supérieur ou égale à 4. L'organisation sur 4 créneaux qui suit est donc optimale.

	créneau 1	créneau 2	créneau 3	créneau 4
épreuves	2 et 6	3 et 5	4 et 7	1

Exercice 8

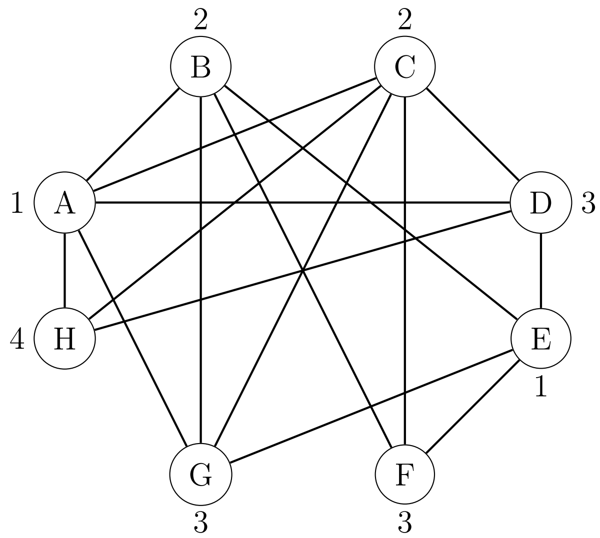
On veut transporter des produits chimiques noté A, B, C, D, E, F, G et H par le train. Le tableau ci-dessous indique donne les incompatibilités des produits (mélange explosif ...). En cas d'incompatibilité, les produit ne peuvent pas être entreposé dans le même wagon.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		X	X	X			X	X
B	X				X	X	X	
C	X			X		X	X	X
D	X		X		X			X
E		X		X		X	X	
F		X	X		X			
G	X	X	X		X			
H	X		X	X				

Quel est le nombre minimal de wagon nécessaire pour transporter ces produits ?

Correction de l'exercice 6

L'algorithme DSATUR appliqué au graphe d'incompatibilité décrit par l'énoncé donne la coloration décrite ci-dessous :



D'autre part, les sommets A, C, D, H forme un clique d'ordre 4 dont le nombre chromatique de ce graphe est supérieur ou égale à 4.
Le nombre minimal de wagons est donc 4 avec l'organisation suivante :

	wagon 1	wagon 2	wagon 3	wagon 4
Produits	A et E	B et C	D, F et G	H