Graphes

I Généralités sur les graphes

Remarque

Dans le domaine des graphes, contrairement à la plupart des autres domaines mathématiques, il existe un certain foisonnement de définitions, de dénominations, de notations et de conventions, pas toujours très bien uniformisées... Cette diversité reflète la multitude des pratiques et des utilisations (on peut voir des graphes presque partout !). Il ne s'agit donc pas d'apprendre par coeur des notations rigides, mais plutôt de comprendre de quoi on parle, de faire le lien entre son intuition et le formalisme, et de prendre un peu de hauteur pour être flexible et savoir s'adapter aux différents contextes - tout en restant bien sûr cohérent avec ses propres conventions.

Dans ce cours, tous les graphes sont supposés **finis et sans arêtes multiples**.

1 Graphes non orientés

Définition

On appelle graphe non orienté G tout couple $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ où :

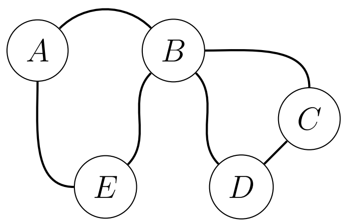
- $\mathcal{S}$ est un ensemble fini d'objets appelés **sommets** ou **noeuds**.
- $\mathcal{A}$ est un ensemble fini d'éléments appelés arêtes tel chaque arête est associée à une paire $\{x, y\}$ de sommets de $\mathcal{S}$. Les graphes de ce cours étant tous des graphes simples, on pourra confondre un élément de $\mathcal{A}$ avec la paire $\{x, y\}$ de sommets distincts auquel il est associé.

Remarque

Un graphe apparaît donc dès lors qu'on veut représenter une **relation** entre des objets. Il est souvent représenté par un dessin où les sommets sont des points et les arrêtes des lignes reliant deux sommets.

Exemple

Si on prend $\mathcal{S} = \{A, B, C, D, E\}$ et $\mathcal{A} = \{\{A, B\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}\}$, on peut représenter le graph $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ par le dessin ci-dessous.



Le réseau Facebook, ayant pour sommets les différents comptes, et pour arêtes les relations d'amitié, est un graphe non orienté.

Remarque

L'ensemble des arrêtes $\mathcal{A}$ est inclus dans l'ensemble des parties à deux éléments de $\mathcal{S}$, donc, pour un graphe ayant n sommets avec $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathrm{card}(\mathcal{A}) \leqslant \binom{n}{2} \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{card}(\mathcal{A}) \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$$

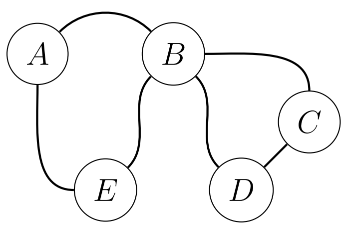
Définitions

Soit $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ un graphe non orienté.

- On appelle ordre du graphe le nombre de ses sommets.
- Deux sommets x et y sont dit **adjacents** (ou voisin) s'ils sont reliés par une arrête, c'est à dire $\{x, y\} \in \mathcal{A}$
- Une arrête est dite **incidente** aux sommets qu'elle relie. c'est à dire que l'arrête $\{x, y\}$ est incidente au sommet x et au sommet y.
- Le degré d'un sommet noté $\deg(x)$ est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.

Exemple

Comme dans l'exemple précédent, avec $\mathcal{S} = \{A, B, C, D, E\}$ et $\mathcal{A} = \{\{A, B\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B,$
on peut représenter le graph $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ par le dessin ci-dessous.



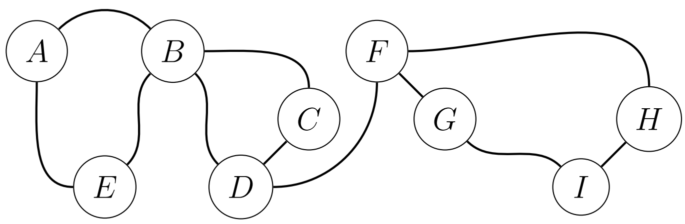
On a l'ordre du graphe G qui est 5, les sommets A et E sont adjacents, et le degré du sommet A est $\deg(A) = 2$

Définitions

Soit $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ un graphe non orienté.

- On appelle **chaîne** de **longueur** p toute suite de $p+1$ sommets $s_0, s_1, s_2, ..., s_p$ telle que deux sommets consécutifs sont adjacents.
  C'est à dire que pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant i \leqslant p-1$, on a $\{s_i, s_{i+1}\} \in \mathcal{A}$.
  Cela correspond à un parcours dans le graphe, d'un sommet s_0 à un sommet s_p, en suivant les p arêtes.
  Cette définition n'est valable que pour les graphes simples.
- Une chaîne est dite **simple** si elle ne passe pas deux fois par la même arête.
- Une chaîne est dite **élémentaire** si elle ne passe pas deux fois par le même sommet.
- Un **cycle** est une chaîne dont le sommet d'arrivée est égal au sommet de départ. En général, quand on parle de cycle, on sous-entend "cycle simple" ou même "cycle élémentaire". En effet, les cycles non simples n'ont pas grand intérêt pour caractériser un graphe (pour chaque arête $\{s, t\}$, la suite s, t, s est un exemple de cycle non simple...), et les cycles simples non élémentaires peuvent se décomposer en cycles élémentaires.

Exemple



Dans le graphe représenté ci-dessus, $\{D, F, G, I, H, F\}$ est une chaîne simple de longueur 5 composée des arêtes $\{\{D, F\}, \{F, G\}, \{G, I\}, \{I, H\}, \{H, F\}\}$, Ce n'est cependant pas une chaîne élémentaire.
$\{F, G, I, H, F\}$ est un cycle de longueur 4 composée des arêtes $\{\{F, G\}, \{G, I\}, \{I, H\}, \{H, F\}\}$ et c'est un cycle élémentaire.

2 Graphes orientés

Définition

On appelle graphe orienté G tout couple $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ où :

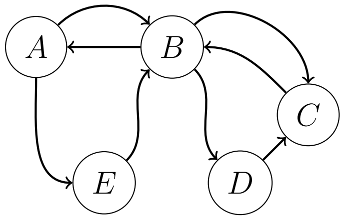
- $\mathcal{S}$ est un ensemble d'objets appelés **sommets** ou **noeuds**.
- $\mathcal{A}$ est un ensemble fini d'éléments appelés **arcs** tel que chaque arc est associé à un couple (x, y) de sommets de $\mathcal{S}$. Les graphes considérés dans ce cours étant simples, chaque arc sera confondu avec le couple de sommet auquel il est associé. Les **arcs** du graphe et sont représentés par des flèches.

Remarque

Dans le cas d'un graphe orienté, le couple (x, y) est ordonné : il traduite une relation du sommet x vers le sommet y, mais il n'implique pas de relation de y vers x, c'est à dire l'existence de l'arc

(y, x).

Exemple



le graphe représenté ci-dessus est composé de 5 sommets $\mathcal{S} = \{A, B, C, D, E\}$
Il est orienté et possède 8 arcs :

$$\mathcal{A} = \{(A,B),(A,E),(B,A),(B,C),(B,D),(C,B),(D,C),(E,B)\}$$

Le réseau Instagram contrairement à Facebook est un graphe orienté : un arc (s,t) indique que "s est un follower de t", ce qui est différent de "t est un follower de s".

Remarque

Les graphes non orientés peuvent être vus comme des graphes orientés en dédoublant chaque arête $\{s,t\}$ pour créer un couple d'arcs (s,t) et (t,s).
Ainsi les graphes orientés forment une classe plus générale et toute proposition concernant les graphes orientés sera en particulier valable pour les graphes non orientés, via cette transformation de "dédoublement".

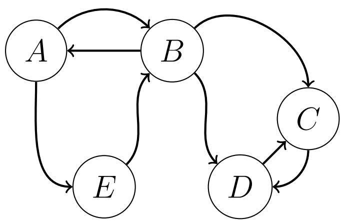
Définition

Dans le cas d'un graphe orienté, on peut distinguer les voisins selon le sens des flèches. En considérant un arc (s,t) d'un graphe G, on dit que :

- t est un **successeur** de s.
- Le **degré sortant** ou **extérieur** d'un sommet s, noté $\deg^+(s)$, est le nombre d'arcs sortants de s, ou de manière équivalente le nombre de successeurs de s.
- s est un **prédécesseur** de t.
- Le **degré entrant** ou **intérieur** d'un sommet s, noté $\deg^-(s)$, est le nombre d'arcs entrants en s, ou de manière équivalente le nombre de prédécesseurs de s.

Exemple

Soit $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ le graphe représenté ci-dessous.



A, C et D sont les successeurs de B, d'où

$$\deg^+(B) = 3$$

A et E sont les prédécesseurs de B d'où

$$\deg^-(B) = 2$$

Remarque

Dans le cas orienté, on a des définitions similaires au graphes non orienté, mais il faut faire attention au sens de parcours des arcs...

Définition

Soit $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ un graphe orienté.

- On appelle **chemin** de **longueur** p toute suite de $p+1$ sommets $s_0, s_1, s_2, ..., s_p$ telle que chaque sommet $s_0, s_1, s_2, ..., s_{p-1}$ est prédécesseur du sommet suivant.
  C'est à dire que pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant i \leqslant p-1$, on a $(s_i, s_{i+1}) \in \mathcal{A}$.
  Cela correspond à un parcours dans le graphe composé de p arcs, d'un sommet s_0 à un sommet s_p.
- Un chemin est dit **simple** si il ne passe pas deux fois par le même arc.
- Un chemin est dit **élémentaire** si il ne passe pas deux fois par le même sommet.
- Un **circuit** est un chemin dont le sommet d'arrivée est égal au sommet de départ.

Remarque

Dans un graphe orienté $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$, les trois expressions suivantes sont équivalentes à dire qu'il existe un chemin d'origine s et d'extrémité t :

1. t est **accessible** depuis s,
2. t est un **descendant** de s,
3. s est un **ascendant** (ou **ancêtre**) de t.

3 Des graphes spéciaux

Dans cette partie, tous les graphes seront considérés simples et non orientés sauf si cela est précisé explicitement.

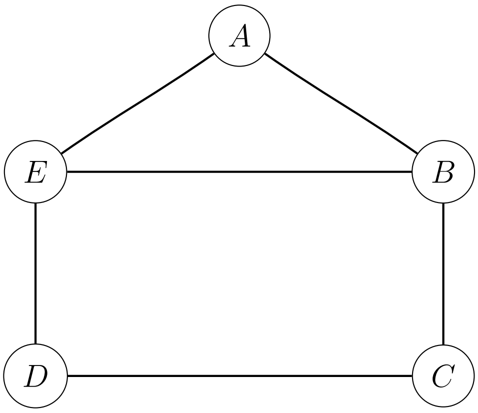
3 .1 Graphe Eulérien

Définition

- On appelle chaîne eulérienne d'un graphe non orienté toute chaîne qui passe par toutes les arêtes, une fois et une seule fois par arête.
- Si une chaîne eurélienne revient au sommet de départ, on parle de cycle eulérien.
- Un graphe qui admet un cycle eulérien est dit eulérien.

- ◦ S'il admet une chaîne eulérienne, il est dit semi-eulérien.

Exemple



Propriété

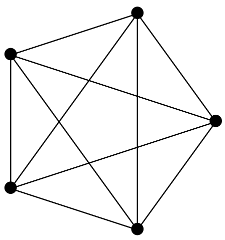
Un graphe est semi-eurélien si et seulement si le nombre de ses sommets de degré impair est 0 ou 2.

3 .2 Graphes complets

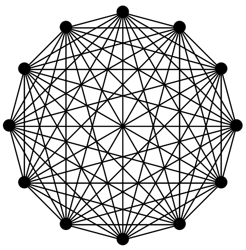
Définition

Un graphe G non orienté est **complet** si toute paire de sommets distincts est reliée par une arête.
On appelle **clique** tout sous graphe complet d'un graphe G.

Exemples



graphe complet d'ordre 5



graphe complet d'ordre 12

Propriété

Soit $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ un graphe non orienté complet tel que $n = \text{card}\,(\mathcal{S}) \in \mathbb{N}^*$.
Le nombre d'arêtes de G est égal au nombre de combinaisons à deux sommets (non ordonnés)

parmi les n sommets du graphe, donc :

$$\mathrm{card}(\mathcal{A}) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

II Représentation des graphes

Remarque

On considère ici un graphe $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
Il existe plusieurs manières classiques d'encoder G en machine. On en présente ici une : par matrice d'adjacence.

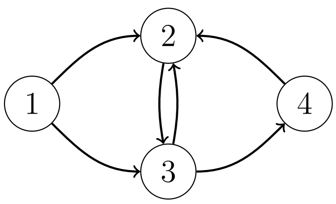
1 Matrice d'adjacence

Définition

La matrice d'adjacence d'un graphe G est la matrice carrée de taille $n \times n$ dont les lignes et les colonnes sont indexées par les sommets, et l'entrée en ligne s et en colonne t vaut

- 1 si (s, t) est un arc de G,
- 0 sinon.

Exemple



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En python, cela donne :

```python
G=[[0,1,1,0],[0,0,1,0],[0,1,0,1],[0,1,0,0]]
```

Remarque

Dans le cas des graphes non orientés, la matrice est symétrique, et on peut ne garder en mémoire que sa composante triangulaire supérieure.
La représentation par matrice d'adjacence possède certains avantages :

1. Elle peut très bien se généraliser au cas des graphes "valués" (i.e. si certains coefficients appelés valuations sont affectés aux arcs du graphe), en substituant le 1 en position (s, t) signalant la présence d'un arc, par la valuation de cet arc.
2. Elle possède en outre une certaine pertinence mathématique en tant que matrice (opérateur linéaire). En effet, la puissance L de la matrice donne le nombre de chemins de longueur L

entre chaque paire de sommets.

III Applications

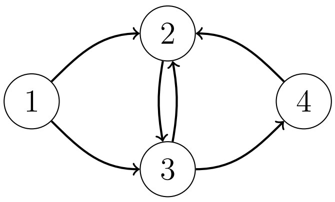
1 Nombre de chemin de longueur donnée

Propriété

Soit n un entier naturel non nul et G un graphe d'ordre n dont les sommets sont numéroté de 1 à n.
Soit M la matrice d'adjacence de G
Pour tout entier naturel k non nul, le coefficient (i, j) (ligne i et colonne j) de la matrice M^k donne le nombre de chemin de longueur k reliant i à j.

Exemple

En reprenant le graphe G de l'exemple précédent.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Il existe donc 2 chemin de longueur 3 permettant d'aller du sommet 1 au sommet 2, les chemins $(1, 2, 3, 2)$ et $(1, 3, 4, 2)$.

2 Chaînes de Markov

Définition

On appelle **chaîne de Markov** toutes suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans un ensemble E finis et non vide dont les éléments sont appelé **états**, et tel que :

- Pour tout état i de E, l'événement $(X_{n+1} = i)$ ne dépend que de l'état dans lequel était le processus à l'instant précédent.
- La probabilité de passer de l'état i à l'état j ne dépend pas de l'instant n.

Exemple

Dans un certain pays, s'il pleut un jour, alors il pleut également le lendemain avec une probabilité de 0,7.
De plus, s'il ne pleut pas un jour, alors il pleut le lendemain avec une probabilité de 0,2.
On Considère une journée (noté jour 0).
Soit X_n la variable aléatoire qui associe 1 s'il pleut n jours après la journée 0 et 2 s'il ne pleut

pas n jours après la journée 0.
Comme le fait qu'il pleuve une journée ne dépend que du temps de la journée précédente et que la probabilité que le temps change ou non ne dépend pas du rang n de la journée, on en déduit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.

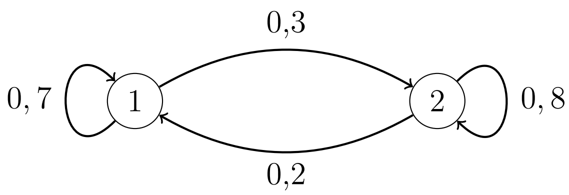
Définition

Soit (X_n) une chaîne de Markov sur un espace d'états E.

- On appelle **graphe pondéré associé** à la chaîne de Markov tout graphe dont les sommets représente les états et dont l'arc reliant l'état i à l'état j est pondéré par la probabilité $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$ de passer de l'état i à l'état j.
- On appelle **Matrice de transition associée** à la chaîne de Markov la matrice où le coefficient situé ligne j et colonne i est la probabilité $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$ de passer de l'état i à l'état j.

Exemple

Dans l'exemple précédent, le graphe pondéré et la matrice de transition associés à la chaîne de Markov sont les suivants :



$$T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Remarque

La somme des coefficients d'une colonne est toujours égale à 1 dans une matrice de transition associée à une chaîne de Markov.

Définition

oit (X_n) une chaîne de Markov. On appelle distribution initiale (noté π_0), la matrice colonne représentant la loi de probabilité de X_0.
La distribution après n transition (noté π_n) est la matrice colonne représentant la loi de probabilité de X_n.

Exemple

En reprenant l'exemple et en supposant qu'il pleuve le jours 0, on aura $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Propriété

Soient T la matrice de transition associée à une chaîne de Markov (X_n) et π_0 la distribution initiale.
Pour tout entier naturel n, la distribution après n transition π_n est :

$$\pi_n = T^n \pi_0$$

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, la distribution après 5 étapes est :

$$\pi_5 = T^5 \pi_0 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,41875 \\ 0,58125 \end{pmatrix}$$

La probabilité qu'il pleuve 5 jours après le jour 0 est donc de $0,41875$.

Démonstration