Primitives et équations différentielles

Exercice 1

Au début du XIX siècle, un économiste Britannique essaie de modélisé la croissance de la population en supposant que l'accroissement d'une population est proportionnelle au nombre d'individus constituant cette population. En résumer si une population A est 3 fois plus importante qu'une population B, il y aura 3 fois plus de naissance et 3 fois plus de décès dans la population A et par conséquent l'accroissement de la population A sera 3 fois supérieure à celui de la population B.
Soit f la fonction associant à chaque réel x le nombre d'individus d'une population A en fonction de l'année x.
L'année 0, la population mondiale était estimée à 200 millions, d'où $f(0) = 200$.
On considère que la population augmente de 10% par an.

1. Donnée une estimation de la population mondiale en l'an 1, puis en l'an 2
2. Estimer la population en l'an 1,5.
3. Estimer la population en l'an 1,1.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
   On suppose que pour tout $h \neq 0$, on a $f(x+h) = f(x) + h \times 0,1 \times f(x)$.
   Montrer alors que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = 0,1f(x)$

Exercice 2

Pendant un match de Rugby, un joueur tente une pénalité.
A moment du coût de pied, le ballon se trouve face au poteau et à une distance de 40m de ceux-ci.
A l'instant $t = 0$, le joueur tape dans le ballon et la vitesse initiale de celui-ci est de $v_0 = 21m.s^{-1}$.
On se place dans le repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où $||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}|| = 1m$.
On note $\overrightarrow{v_0}$ le vecteur représentant la vitesse initiale du ballon, ce dernier étant tel que :

$$||\overrightarrow{v_0}|| = v_0 \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{v_0}\right) = \frac{\pi}{4}$$

On associe la position du ballon à chaque instant t (exprimé en seconde) par la position du point $M\left(x(t), y(t)\right)$.
A l'instant $t = 0$, le ballon est situé à l'origine du repère, c'est à dire $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$.
La vitesse du ballon à l'instant est modélisé par le vecteur $\overrightarrow{v(t)} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ où x' et y' sont dérivées sur $\mathbb{R}_+$ des fonctions x et y.
Le ballon est soumis uniquement à l'accélération terrestre $\overrightarrow{g}$ dont les coordonnées sont les dérivées respectives des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v(t)}$.

On suppose que

$$\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{v_0}$
2. (a) Justifier que x' est constante.
   (b) Quelle sont les fonctions qui ont des dérivée constantes ?
   (c) En déduire l'expression de $x(t)$ sachant que $x(0) = 0$
3. (a) Quelles sont les fonctions ayant pour dérivée la fonction constante $t \mapsto -9,81$.
   (b) En déduire l'expression de $y'(t)$.
   (c) Déterminer la dérivée de la fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{2}$ et en déduire une fonction f tel que ayant pour dérivée y'.
   (d) En admettant qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $y(t) = f(t)+C$, déterminer l'expression de $y(t)$
4. Le ballon passe-t-il au-dessus de la barre transversale de pénalité qui est situé à 3m du sol ?

Exercice 3

Déterminer les primitives des fonctions f suivantes sur l'intervalle I :

1. $f(x) = 3x + 2$ et $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 3$ et $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = x^4 + 3x^2$ et $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x)$

1. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire l'ensemble de primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer alors l'unique primitive G de f telle que $G(1) = 3$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \mathrm{e}^x$$

1. Donner une primitive de la fonction f.
2. En déduire toutes les primitives de la fonction f sur $]0;+\infty[$
3. Déterminer la primitive F de la fonction f telle que $F(1) = 0$

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

On note F la primitive de f sur $[0;+\infty[$ qui s'annule en 0.
Dans cet exercice, on ne cherchera pas à déterminer F.

1. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = F(x) - \frac{1}{2}x$$

   Montrer que g est croissante sur $[0;+\infty[$.
2. Calculer $g(0)$
3. En déduire que pour tout réel x strictement positif, on a $g(x) \geqslant 0$
4. En déduire la limite de F en $+\infty$

Exercice 7

On considère l'équation différentielle :

$$(E): \quad y'' - y' - 2y = 2x\mathrm{e}^x$$

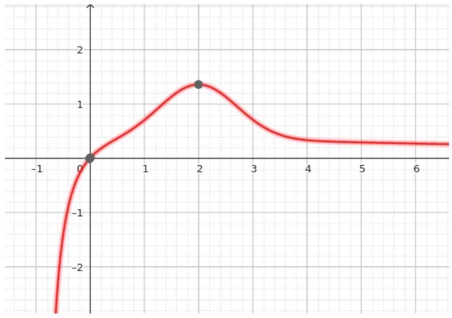
1. Soient A et B deux réels.
   Montrer que la fonction $x \mapsto A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{2x}$ est une solution de l'équation différentielle E_0 appelée équation différentielle homogène associée à (E) et définie par :

$$(E_0): \quad y'' - y' - 2y = 0$$

   On admet dans la suite que toutes les solutions de (E_0) sont de cette forme.
2. Déterminer une solution ϕ de (E) de la forme $\phi(x) = (mx + p)\mathrm{e}^x$ où m et p sont des réels à déterminer.
3. Soit g une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - \phi$ est solution de (E_0).
4. Résoudre alors (E)
5. En déduire la solution h de (E) telle $h(0) = 1$ et $h'(0) = 0$

Exercice 8

On donne la courbe représentative d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.



Dire si les propositions suivantes sont vraies, fausses ou si l'on ne peut pas savoir.

1. Toutes primitives de f sur $\mathbb{R}$ s'annule en 0.
2. Il existe une primitive de f qui s'annule en 0.
3. Toutes primitives de f sur $\mathbb{R}$ est croissante sur $[0;+\infty[$
4. La primitives de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 2 est décroissante sur $]-\infty;2]$.
5. La primitive de f qui s'annule en 0 est positive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Déterminer dans chacun des cas une primitive de la fonction f sur I.

1. $f'(x) = \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x}$ et $I = \mathbb{R}$
2. $\dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$ et $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = x^2\mathrm{e}^{x^3}$
4. $f(x) = x \times (1-x^2)^5$ et $I = \mathbb{R}$

Exercice 10

Déterminer dans chaque cas la primitive F de f sur I qui respecte la condition donnée.

- $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $I =]0;+\infty[$ et $F(1) = 4$
- $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$, $I =]-\infty;+\infty[$ et $F(0) = 1$
- $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $I =]-2;+\infty[$ et $F(0) = \ln(2)$
- $f(x) = \dfrac{-4}{x-3}$, $I =]-\infty;3[$ et $F(-4) = 2$

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2-3x)\mathrm{e}^{-x}$$

1. Justifier que f admet des primitive sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction $F : x \mapsto (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire l'ensemble des primitive de f sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminer la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.

Exercice 12

Soit (E) l'équation différentielle :

$$(E): \quad 2y' - 5y = 4$$

1. Démontrer que si y est solution de (E), alors pour y' est dérivable et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$y''(x) = \frac{25}{4}y(x) + 5$$

2. Soit f la solution de (E) telle que $f''(1) = \dfrac{25}{4}$.
   (a) Déterminer les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$
   (b) En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

Exercice 13

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 3y$
2. $y' + y = 0$
3. $y' - 2y = 0$

Exercice 14

Soit (E) l'équation différentielle :

$$(E): \quad y' = y + \mathrm{e}^x$$

1. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$ est une solution particulière de (E)
2. En déduire l'ensemble des solution de (E).
3. Déterminer l'unique solution G de (E) telle que $G(0) = 5$

Exercice 15

On place une tasse de thé bouillante dans une pièce où la température est constante et égale à 20°C. Selon la loi de Newton, la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence entre la température de la tasse et la température de la pièce.
On note $T(t)$ la température à l'instant t (t étant exprimé en minutes).
On suppose $T(0) = 100$ et, d'après la loi de Newton, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que T est solution de l'équation différentielle :

$$y' = k(y - 20)$$

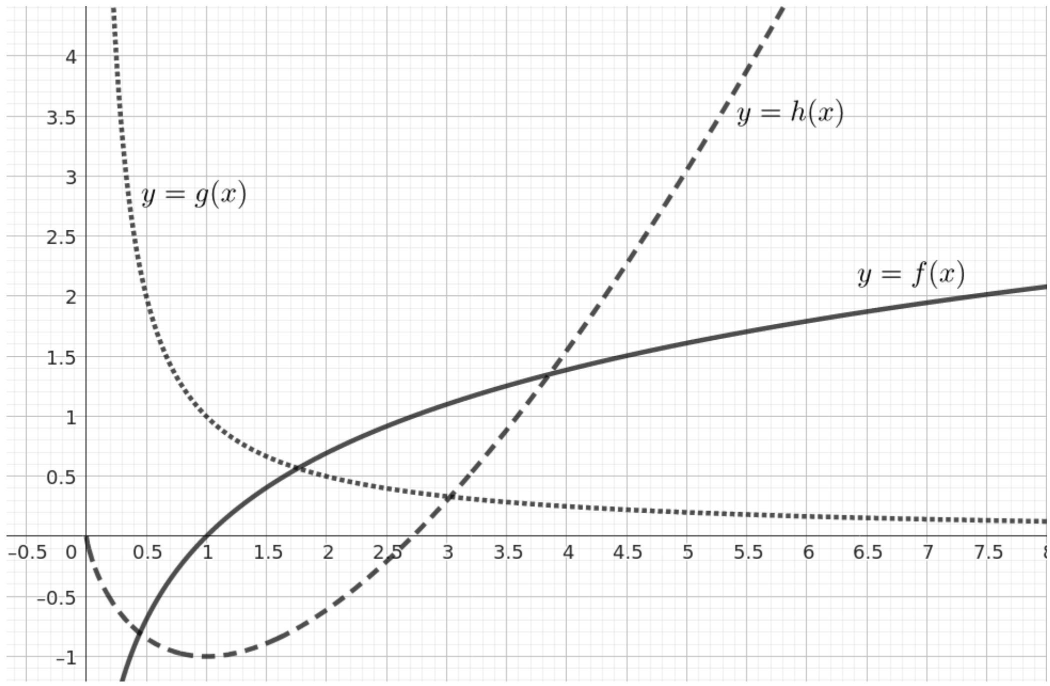
1. Résoudre l'équation différentielle $y' = k(y-20)$ et en déduire l'expression de T en fonction de k.
2. Au bout de 14 minutes, la température du thé est égale à 40°C.

(a) Démontrer que $k = \dfrac{-\ln(2)}{7}$

(b) Au bout de combien de temps la température devient-elle inférieure à 25°C

Exercice 16

Soit f une fonction définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ dont la courbe est donnée ci-dessous.
Sur ce graphique, on donne aussi les courbes représentatives des fonctions g et h.
L'une de ces deux fonctions est la dérivée et l'autre est une primitive de f. indiquez en justifiant votre réponse laquelle de ces deux fonctions est la primitive, et laquelle est la dérivée.



Exercice 17

Un cycliste roule sur une route descendante, rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse (en $m.s^{-1}$) à l'instant t (en s).
On suppose que la fonction v ainsi définie est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que v est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle :

$$(E) : 10y' + y = 30$$

Enfin, on suppose que le cycliste s'élance avec une vitesse initiale nulle, c'est à dire que $v(0) = 0$.

1. Démontrer que $v(t) = 30\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right)$
2. (a) Déterminer les variation de v sur $[0; +\infty[$.

   (b) Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.
3. Dans cette question, on considère que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à $0,1 m.s^{-2}$.

Déterminer la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse est stabilisée.
Donner une valeur approchée à $0,1$ près.

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{2x}$

1. Montrer qu'i l existe deux réels a et b tel que pour tout réel x :

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$$

2. En déduire une primitive de f dur $\mathbb{R}$.

Exercice 19

Dans cet exercice, on étudie l'évolution d'une population animale dans un milieu où des obstacles freine uniformément cette évolution. On note $h(t)$ le nombre d'individu après un temps t.
Dans ce cas, h est solution de l'équation différentielle établie par **Verhulst** en 1838 :

$$(E) : y' = ay\left(1 - \frac{y}{k}\right)$$

où a et k sont deux réels dépendant du milieu et de la population.

1. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$ ne s'annulant pas sur cet intervalle et g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$
   (a) Déterminer $f'(t)$ en fonction de $g(t)$ et de $g'(t)$
   (b) En déduire que g est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle :

$$(E_1) : y' = -aky(t) + a$$

2. Soit g une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}_+$ ne s'annulant pas sur cet intervalle et f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$
   (a) Déterminer $g'(t)$ en fonction de $f(t)$ et de $f'(t)$
   (b) En déduire que f est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle (E)
3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_1).
4. En déduire les solutions de (E)
5. Déterminer la limite de ces solutions quand t tend vers $+\infty$
6. Ce modèle est bien adapté à l'évolution des états unis entre 1790 et 1930 avec $K = 197273000$ et $a = 0,03134$.
   Sachant que la population des états unis était de 2,3 millions d'habitants est 1790, déterminer la fonction h modélisant la population des états unis entre 1790 et 1830.

Exercice 20

L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

Partie I

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}$$

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
   Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.
   Résoudre l'équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie II

Dans cette partie, k est un nombre réel fixé que l'on cherche à déterminer.
On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x + k)\mathrm{e}^{-x}.$$

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal et C la courbe représentative de la fonction h.
On a représenté sur le graphique en annexe les courbes C_k et C sans indiquer les unités sur les axes ni le nom des courbes.

1. Sur le graphique en annexe à rendre avec la copie, l'une des courbes est en traits pointillés, l'autre est en trait plein. Laquelle est la courbe C ?
2. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k et placer sur l'annexe à rendre avec la copie l'unité sur chacun des axes du graphique.

Annexe