Somme de variables aléatoires

Exercice 1

Le cinéma de la commune propose différents tarifs :

- Un tarif plein à 12 euros.
- Un tarif étudiant à 7 euros.
- Un tarif enfant (moins de 12 ans) à 5 euros.

Une étude portant sur la clientèle a montré que 48% des clients paient un tarif plein, 22% des clients un tarifs enfants et les autres un tarif étudiants.
Par ailleurs, sur l'ensemble des clients, 12% achètent uniquement un paquet de bonbons a 4 euros, 23% achète uniquement un paquet de pop-corn taille standard à 5 euros et 15% achètent uniquement un paquet de pop-corn grande taille à 7 euros. Les autres clients n'achètent rien.
On choisit au hasard un client du cinéma et on appelle respectivement X_1 et X_2 les variables aléatoires qui associe à chaque issue respectivement le prix payé pour la place de cinéma et pour les confiseries.

1. Déterminer les lois de probabilité de X_1 et de X_2.
2. Déterminer $E(X_1)$ et $E(X_2)$.
3. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le prix total dépensé pas le client.
   (a) Exprimer X en fonction de X_1 et X_2.
   (b) En déduire $E(X)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2

On considère une urne dans laquelle se trouve différentes boules de couleur : des rouges, des vertes et des noires.
On tire avec remise trois boules de l'urne.
a chaque étape, obtenir une boule noire rapporte 5 points, obtenir une boule verte rapporte 2 points et obtenir une boule rouge fait perdre 10 points.
Pour tout entier naturel i compris entre 1 et 3, on note respectivement R_i, V_i et N_i l'événement "obtenir une boule rouge (respectivement une boule verte ou une boule noire) au $i^{\text{ième}}$ tirage.
On note enfin X_1, X_2 et X_3 les variables qui associe à chaque issue le nombre de points obtenu au premier (respectivement deuxième et troisième) tirage.

1. Calculer les valeurs suivantes :
   $X_1\left(V_1 \cap R_2 \cap N_3\right)$, $X_2\left(V_1 \cap R_2 \cap N_3\right)$, $X_1\left(V_1 \cap R_2 \cap R_3\right)$, $X_2\left(V_1 \cap R_2 \cap R_3\right)$
   et $X_3\left(V_1 \cap R_2 \cap R_3\right)$.
2. Déterminer les lois de probabilité de X_1, X_2 et X_3.
3. Déterminer $E(X_1)$, $E(X_2)$ et $E(X_3)$.

4. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre total de points.
   (a) Exprimer X en fonction de X_1, X_2 et X_3
   (b) En déduire $E(X)$

Exercice 3

Deux lycées sont situés dans la même commune.
Le premier lycée, noté lycée A, réalise de très bons résultats aux examen : 75% des élèves de l'établissement obtiennent le bac avec mention.
Dans le lycée B, seulement 55% des élèves l'obtiennent avec mention.
On choisit 12 élèves du lycée A et 20 du lycée B.
Le nombre important d'élèves dans chaque lycée permet d'assimiler ces expériences à des tirage avec remises.
On note respectivement X et Y les variables aléatoires associant à chaque issue le nombre délèves du lycée A (respectivement du lycée B) ayant eu le bac avec mention.

1. Donner les lois suivies par X et Y.
2. Soit Z la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre d'élèves ayant eu le bac avec mention indépendamment de leur lycée d'origine.
   (a) Exprimer Z en fonction de X et de Y.
   (b) En déduire $E(Z)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   (c) Calculer $V(Z)$ et en déduire $\sigma(Z)$

Exercice 4

On considère une urne contenant trois boules indiscernables au toucher et numéroté de 1 à 3.
On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne.
Pour $k \in \{1; 2; 3\}$, on dit qu'il y a "rencontre" au $k^{\text{ième}}$ tirage lorsque l'on tire la boule numéroté k au $k^{\text{ième}}$ tirage.
On cherche a connaître le nombre moyen de rencontres.
Pour tout $(m, k) \in \{1; 2; 3\}^2$, on note $B_{m,k}$ l'événement "On a obtenu la boule m au $k^{\text{ième}}$ tirage".

1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
2. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires définies par :
   - $X_1 = 1$ si la boule numéroté 1 est tirée en premier et 0 sinon.
   - $X_2 = 1$ si la boule numéroté 2 est tirée en deuxième et 0 sinon.
   - $X_3 = 1$ si la boule numéroté 3 est tirée en troisième et 0 sinon.

   Donner alors $E(X_1)$, $E(X_2)$ et $E(X_3)$.
3. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre de rencontre.
   (a) Exprimer X en fonction de X_1, X_2 et X_3.
   (b) En déduire le nombre moyen de rencontre.
4. On considère une urne contenant n boules numéroté de 1 à n. On tire successivement et sans remise n boules de l'urne.
   Quel est théoriquement le nombre moyen de rencontre ?

Exercice 5

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

Partie I

Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point.

On considère que :

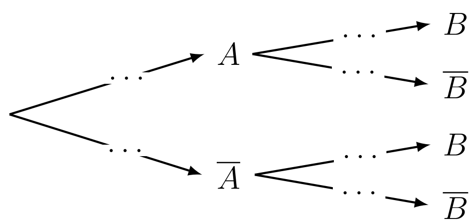
- Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q1.
- Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2 ; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2.

On prend un candidat au hasard et on note :

- A l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q1 » ;
- B l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q2 ».

On note $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires de A et de B.

1. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q1 et Q2.
3. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2.

On note :

- X_1 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q1 ;
- X_2 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q2 ;
- X la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice, c'est-à-dire $X = X_1 + X_2$.

4. Déterminer l'espérance de X_1 et de X_2. En déduire l'espérance de X. Donner une interprétation de l'espérance de X dans le contexte de l'exercice.
5. On souhaite déterminer la variance de X.
   (a) Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$. En déduire $P(X = 1)$.
   (b) Montrer que la variance de X vaut 0,57.
   (c) A-t-on $V(X) = V(X_1) + V(X_2)$? Est-ce surprenant ?

Partie II

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point.

Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité $\frac{3}{4}$ de répondre correctement, indépendamment des autres questions.
On note Y la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Donner la valeur exacte de $P(Y = 8)$.
3. Donner l'espérance et la variance de Y.

Partie III

On suppose que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes. On note la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen : $Z = X + Y$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z.
2. Soit n un nombre entier strictement positif.
   Pour i entier variant de 1 à n, on note Z_i la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la note de l'élève numéro i à l'examen.
   On admet que les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sont identiques à Z et indépendantes.
   On note M_n la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la moyenne de leurs n notes, c'est-à-dire :
   $$M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}{n}$$
   (a) Quelle est l'espérance de M_n ?
   (b) Quelles sont les valeurs de n telles que l'écart type de M_n soit inférieur ou égal à 0,5 ?
   (c) Pour les valeurs trouvées en **b.**, montrer que la probabilité que $6,3 \leqslant M_n \leqslant 8,3$ est supérieure ou égale à 0,75 .

Exercice 6

On lance un dé tétraédrique équilibré dont les faces portent les montants en euros :

$$4; 1; 2 \text{ et } 3$$

Soit X la variable aléatoire associant à chaque issue le gain algébrique en euros affiché.

1. Calculer $E(X)$, interpréter ce résultat puis calculer $V(X)$.
2. On décide de doubler chacun des montants (par exemple 3 devient 6).
   Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique en euros de ce deuxième jeu.
   Exprimer Z en fonction de X puis en déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.
3. On décide enfin d'ajouter 2 à chacun des montants (par exemple 3 devient 5).
   Soit Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique en euros de ce troisième jeu.
   Exprimer Y en fonction de X puis en déduire E(Y) et ?(Y).

Exercice 7

Une urne contient 1 boule rouge et n boule blanches.
On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.

1. déterminer en fonction de n la probabilité des événements suivants :
   - M : Les deux boules tirées sont de la même couleur.
   - D : Mes deux boules tirée sont de couleurs différentes.
2. On considère le jeux suivant :
   Le joueur perds $(n+1)^2$ euros si M est réalisé, et il perds $2(n+1)^2$ euros sinon.
   Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issues le gain réalisé.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Montrer que $E(X) = -n^2 + 4n - 1$
   (c) Pour quelles valeurs de n le jeu est-il favorable au joueur ?
   (d) Si on laisse le choix du nombre de boules blanches au joueur, combien de boules doit-il choisir ?

Exercice 8

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant r \leqslant n$.
Un placard contient n paires de chaussures.
On tire au hasard $2r$ chaussures du placard et on note X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre de paires complètes parmi les chaussures tirées.
Les paires du placard sont numérotés de 1 à n et pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui associe 1 à chaque issue si les deux chaussures de la paire i se trouvent dans les chaussures tirées, et 0 sinon.

1. Démontrer que $\forall i \in [\![1;n]\!], E(X_i) = \dfrac{r(2r-1)}{n(2n-1)}$.
2. En déduire $E(X)$

Exercice 9

On tire au hasard et avec remise 3 cartes dans un jeu de 52 cartes.
On gagne 7 euros par as obtenu, 4 euros par valet, dame ou roi obtenu et on perd 1 euro pour n'importe quelle autre carte obtenue.
Si on tire : as de pique, 7 de trèfle et valet de carreau, on gagne : $7 - 1 + 4 = 10$ euros.
On note Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique total à ce jeu.
Décomposer Z sous la forme d'une somme de trois variables aléatoires que l'on définira puis calculer $E(Z)$.

Exercice 10

Les jours où elle s'entraîne au jet de 7 mètres au handball, Elia fait 30 tirs le matin et 50 l ?après-midi. Elle marque avec une probabilité égale à 0,46 le matin et une probabilité égale à 0,78 l'après-midi. Tous les tirs sont supposés indépendants.
Soit X (respectivement Y) la variable aléatoire donnant le nombre de tirs réussis par Elia le matin (respectivement l'après-midi).

1. Donner la loi suivie par X et celle suivie par Y.
2. Que représente $X + Y$?
3. Calculer $E(X + Y)$ et en donner une interprétation