

Somme de variables aléatoires

I Rappel



Définition

On appelle variable aléatoire X associée à une expérience aléatoire sur Ω toute fonction définie sur Ω qui à chaque issue w de Ω associe un réel $X(w)$. On a donc :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$



Exemples

On lance deux fois de suite un dé à 6 faces.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue la somme des résultats obtenus.

X peut donc être représentée par le tableau suivant où chaque case représente une issue de l'expérience aléatoire :

2 ^e dé \ 1 ^{er} dé	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

C'est à dire : $X((2; 4)) = 6$, $X((1; 5)) = 6$. ou encore $X((1; 1)) = 2$

En considérant que l'on est dans une situation d'équiprobabilité, on aura :

$$P(X = 4) = P((1; 3)) + P((2; 2)) + P((3; 1)) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$$



Remarque

En définissant une variable aléatoire sur un univers Ω , on réalise une partition de l'univers.

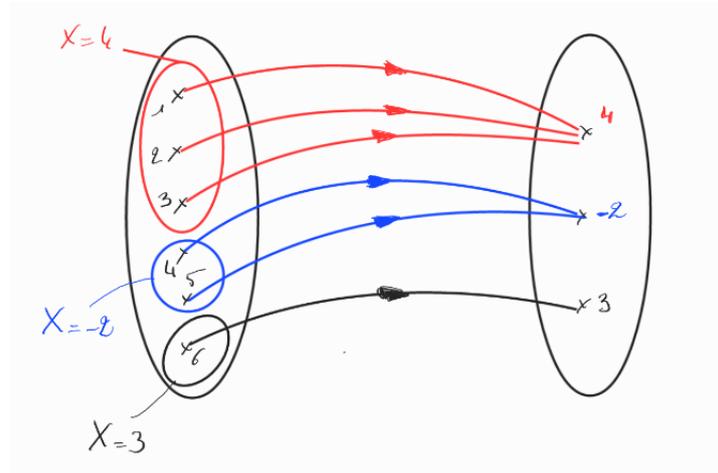
En effet, si $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sont les valeurs prises par la variable aléatoire X , alors :

- $(X = x_0) \cup (X = x_1) \cup \dots \cup (X = x_n) = \Omega$
- Pour tout entiers naturels i et j inférieur à n tels que $i \neq j$ on a $(X = x_i) \cap (X = x_j) = \emptyset$

On lance un dé à 6 faces.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue 4 si le résultat est inférieur ou égale à 3, -2 si le résultat est 4 ou 5 et 3 si le résultat est 6.

Cette situation est représentée par le schéma ci-dessous.



On a donc $X(1) = 4$, $X(2) = 4$, $X(3) = 4$ et pour tout $i \notin \{1; 2; 3\}$, $P(\{i\}) \neq 4$.
 D'où $P(X = 4) = P(\{1; 2; 3\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

♥ Propriété

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω .

Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X et $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ leur probabilités respectives. On a donc $P(X = x_i) = p_i$.

On a alors :

- $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

- $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$ ou encore $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - E(X)^2$

- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II Somme de variables aléatoires

Dans ce chapitre, X et Y sont deux variables aléatoires réelles définies sur un univers fini Ω .

1 Définition

📖 Définition

$Z = X + Y$ est la variable aléatoire définie sur Ω par $Z(w) = X(w) + Y(w)$.

$T = aX$ est la variable aléatoire définie sur Ω par $T(w) = a \times X(w)$.

💡 Exemples

L'exemple vu au I peut aussi être modélisé en utilisant la somme de deux variables aléatoires comme ci-dessous.

On lance deux fois de suite un dé à 6 faces.

Soient X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le résultat du premier dé et Y celle qui associe à chaque issue le résultat du second dé.

La variable aléatoire $Z = X + Y$ associe donc à chaque issue la somme des deux dés.

De même, la variable aléatoire $T = 3X$ associe à chaque issue le triple du résultat du premier dé.

$Z = X + Y$ et $T = 3X$ peuvent donc être représentées par les tableaux suivants :

	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2^e dé \ 1^{er} dé</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">12</td> </tr> </table>	2^e dé \ 1 ^{er} dé	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	8	3	4	5	6	7	8	9	4	5	6	7	8	9	10	5	6	7	8	9	10	11	6	7	8	9	10	11	12	et pour T :	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2^e dé \ 1^{er} dé</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">12</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">18</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">12</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">18</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">12</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">18</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">12</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">18</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">12</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">18</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">12</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">18</td> </tr> </table>	2^e dé \ 1 ^{er} dé	1	2	3	4	5	6	1	3	6	9	12	15	18	2	3	6	9	12	15	18	3	3	6	9	12	15	18	4	3	6	9	12	15	18	5	3	6	9	12	15	18	6	3	6	9	12	15	18
2^e dé \ 1 ^{er} dé	1	2	3	4	5	6																																																																																															
1	2	3	4	5	6	7																																																																																															
2	3	4	5	6	7	8																																																																																															
3	4	5	6	7	8	9																																																																																															
4	5	6	7	8	9	10																																																																																															
5	6	7	8	9	10	11																																																																																															
6	7	8	9	10	11	12																																																																																															
2^e dé \ 1 ^{er} dé	1	2	3	4	5	6																																																																																															
1	3	6	9	12	15	18																																																																																															
2	3	6	9	12	15	18																																																																																															
3	3	6	9	12	15	18																																																																																															
4	3	6	9	12	15	18																																																																																															
5	3	6	9	12	15	18																																																																																															
6	3	6	9	12	15	18																																																																																															

2 Espérance et Variance de somme de variables aléatoires

Propriété (Admise)
 X étant une variable aléatoire définie sur un univers Ω , on a :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)X(\omega)$$

Exemple

On lance un dé à 6 faces. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue la valeur 5 si le résultat est supérieur ou égale à 5 et 1 dans le cas contraire.

Le tableau suivant résume bien la situation.

<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">ω</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$X(\omega)$</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$P(\omega)$</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$\frac{1}{6}$</td> </tr> </table>	ω	1	2	3	4	5	6	$X(\omega)$	1	1	1	1	5	5	$P(\omega)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	et	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">x_i</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$P(X = x_i)$</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$\frac{4}{6}$</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$\frac{2}{6}$</td> </tr> </table>	x_i	1	5	$P(X = x_i)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$
ω	1	2	3	4	5	6																							
$X(\omega)$	1	1	1	1	5	5																							
$P(\omega)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$																							
x_i	1	5																											
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$																											

dans ce cas :

- $P(X = 1) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) = \frac{4}{6}$
- $P(X = 5) = P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{2}{6}$

d'où :

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 1 \times P(X = 1) + 5 \times P(X = 5) \\
 &= 1 \times (P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\})) + 5 \times (P(\{5\}) + P(\{6\})) \\
 &= 1 \times P(\{1\}) + 1 \times P(\{2\}) + 1 \times P(\{3\}) + 1 \times P(\{4\}) + 5 \times P(\{5\}) + 5 \times P(\{6\}) \\
 &= \sum_{i=1}^6 X(i) \times P(\{i\})
 \end{aligned}$$

Démonstration

Soient $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X , i un entier naturel compris entre 1 et n et A_i l'ensemble des issues de l'univers Ω associé à x_i , autrement dit :

$$A_i = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = x_i\}$$

$\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ est donc une partition de l'univers ω et on a $P(X = x_i) = \sum_{\omega \in A_i} P(\omega)$, d'où :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^n x_i \times P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(x_i \times \sum_{\omega \in A_i} P(\omega) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\omega \in A_i} x_i \times P(\omega) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\omega \in A_i} X(\omega) \times P(\omega) \right) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \times P(\omega) \quad \text{car } \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \text{ est une partition de l'univers.} \end{aligned}$$

Propriété

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un univers Ω et a un nombre réel.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX) = aE(X)$$

et

$$V(aX) = a^2V(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX) = |a|\sigma(X)$$

Exemple

On lance un dé à 6 faces dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et une pièce de 1 euros. L'expérience aléatoire est donc le lancé des deux éléments (la pièce et le dé).

Soient X la variable aléatoire qui associe à chaque issue (Chaque lancé des deux éléments) le résultat du dé et Y la variable aléatoire qui associe à chaque issue 1 si la pièce tombe sur pile et -2 si elle tombe sur face.

Dans les tableaux suivants, chaque case représente une issue.

Pour X :	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">pièce \ dé</td> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> <td style="padding: 2px 5px;">2</td> <td style="padding: 2px 5px;">3</td> <td style="padding: 2px 5px;">4</td> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> <td style="padding: 2px 5px;">6</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">pile</td> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> <td style="padding: 2px 5px;">2</td> <td style="padding: 2px 5px;">3</td> <td style="padding: 2px 5px;">4</td> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> <td style="padding: 2px 5px;">6</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">face</td> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> <td style="padding: 2px 5px;">2</td> <td style="padding: 2px 5px;">3</td> <td style="padding: 2px 5px;">4</td> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> <td style="padding: 2px 5px;">6</td> </tr> </table>	pièce \ dé	1	2	3	4	5	6	pile	1	2	3	4	5	6	face	1	2	3	4	5	6
pièce \ dé	1	2	3	4	5	6																
pile	1	2	3	4	5	6																
face	1	2	3	4	5	6																

et pour Y :	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">pièce \ dé</td> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> <td style="padding: 2px 5px;">2</td> <td style="padding: 2px 5px;">3</td> <td style="padding: 2px 5px;">4</td> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> <td style="padding: 2px 5px;">6</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">pile</td> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">face</td> <td style="padding: 2px 5px;">-2</td> </tr> </table>	pièce \ dé	1	2	3	4	5	6	pile	1	1	1	1	1	1	face	-2	-2	-2	-2	-2	-2
pièce \ dé	1	2	3	4	5	6																
pile	1	1	1	1	1	1																
face	-2	-2	-2	-2	-2	-2																

On a donc :

$$E(X) = \left(1 \times \frac{1}{6}\right) + \left(2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(3 \times \frac{1}{6}\right) + \left(4 \times \frac{1}{6}\right) + \left(5 \times \frac{1}{6}\right) + \left(6 \times \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{2}$$

et

$$E(Y) = \left(1 \times \frac{1}{2}\right) + \left(-2 \times \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2}$$

D'où, en utilisant la propriété :

$$E(X + Y) = \frac{7}{2} + \frac{-1}{2} = 3 \quad \text{et} \quad E(4X) = 4 \times \frac{7}{2} = 14$$

Démonstration

1. En effet, l'espérance de la somme de deux variables aléatoires :

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (X + Y)(\omega)P(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega))P(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega)P(\omega) + Y(\omega)P(\omega)) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)P(\omega) \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

2. Pour l'espérance du produit de la variable aléatoire X par le réel a

$$\begin{aligned} E(aX) &= \sum_{\omega \in \Omega} (aX)(\omega)P(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (a \times X(\omega))P(\omega) \\ &= a \times \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) \\ &= aE(X) \end{aligned}$$

3. Pour la variance du produit de la variable aléatoire X par le réel a

$$\begin{aligned} V(aX) &= E((aX)^2) - E(aX)^2 \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)((aX)(\omega))^2 - (aE(X))^2 \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)(a \times X(\omega))^2 - a^2E(X)^2 \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} a^2P(\omega)X(\omega)^2 - a^2E(X)^2 \\ &= a^2 \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)X(\omega)^2 - a^2E(X)^2 \\ &= a^2 \left(\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)X(\omega)^2 - E(X)^2 \right) \\ &= a^2(E(X^2) - E(X)^2) \\ &= a^2V(X) \end{aligned}$$

4. Et pour l'écart type du produit de la variable aléatoire X par le réel a

$$\sigma(aX) = \sqrt{V(aX)} = \sqrt{a^2V(X)} = |a|\sqrt{V(X)} = |a|\sigma(X).$$

Remarques

- $\forall b \in \mathbb{R}, E(X + b) = E(X) + b$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$

III Variables aléatoires indépendantes



Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aléatoire définies sur un univers Ω et à valeurs respectivement dans E_1, E_2, \dots, E_n .

On dit que X_1, X_2, \dots, X_n sont **indépendantes** si pour tout $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$, on a :

$$P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \dots \cap (X_n = x_n)) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \dots \times P(X_n = x_n)$$



Exemple

Dans l'exemple précédent où on lance un dé à 6 faces et une pièce de 1 euros, X étant la variable aléatoire qui associe à chaque issue le résultat du dé et Y celle qui associe à chaque issue 1 si la pièce tombe sur pile et -2 si elle tombe sur face.

On a pour tout $(i; j) \in \llbracket 1; 6 \rrbracket \times \{1; -2\}$, on a

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{12} \quad \text{et} \quad P(X = i) \times P(Y = j) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

D'où l'indépendance de X et Y .

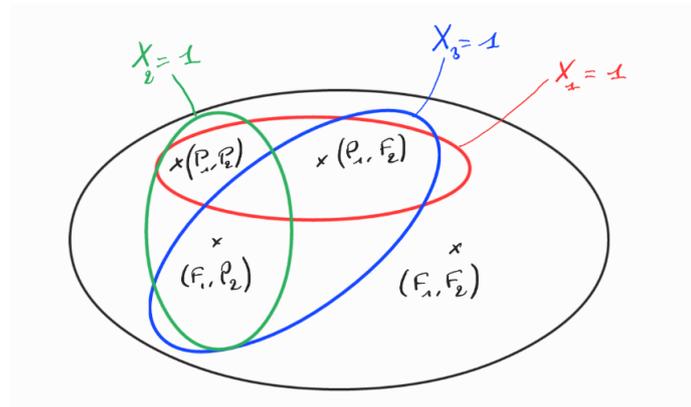


Danger

Si les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont deux à deux indépendantes, alors **on ne peut pas conclure** qu'elles sont indépendantes comme le montre l'exemple suivant :

En effet, si l'on considère deux lancer d'une pièce de monnaie et si l'on note :

- X_1 la variable aléatoire qui associe à chaque issue 1 si le résultat du premier lancer est pile et 0 sinon.
- X_2 la variable aléatoire qui associe à chaque issue 1 si le résultat du second lancer est pile et 0 sinon.
- X_3 la variable aléatoire qui associe à chaque issue 1 si le nombre de piles obtenu est impair et 0 sinon.



On a alors X_1 et X_2 qui sont indépendantes, en effet pour tout $(i, j) \in \{0; 1\}^2$:

$$P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(X_1 = i) \times P(X_2 = j) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

De même X_1 et X_3 sont indépendantes, en effet pour tout $(i, j) \in \{0; 1\}^2$:

$$P((X_1 = i) \cap (X_3 = j)) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(X_1 = 0) \times P(X_3 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

On montre de même que X_2 et X_3 sont aussi indépendantes.

Donc X_1, X_2 et X_3 sont **deux à deux indépendantes** et pourtant :

$$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = P(\emptyset) = 0 \quad \text{et} \quad P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) \times P(X_3 = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Donc X_1, X_2 et X_3 **ne sont pas indépendantes**

♥ Propriété (admise)
 Soient X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur un univers Ω et a un nombre réel.

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

💡 Exemple

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \left(1^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(2^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(3^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(4^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(5^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(6^2 \times \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ &= \frac{35}{12} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\ &= \left(1^2 \times \frac{1}{2}\right) + \left((-2)^2 \times \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

D'où, en utilisant la propriété :

$$V(X + Y) = \frac{35}{12} + \frac{9}{4} = \frac{31}{2} \quad \text{et} \quad V(4X) = 4^2 \times \frac{31}{12} = \frac{124}{3}$$

IV Somme de variables aléatoires identiquement distribués

1 Variables aléatoires identiquement distribués



Définition

On dit que deux variables aléatoires sont identiquement distribuées lorsqu'elles ont la même loi de probabilité.

Autrement dit, avec X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω et à valeur dans $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$

X et Y sont identiquement distribuées si pour tout entier naturel $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a :

$$P(X = r_i) = P(Y = r_i)$$



Exemple

Une roue de loterie comporte 4 secteurs angulaires égaux. Les deux premiers secteurs valent 300 points, le troisième vaut 100 points et le dernier vaut -400 points.

On fait tourner la roue 4 fois de suite et on gagne la somme de points obtenus lors des 4 lancers.

L'expérience aléatoire est donc la succession des quatre lancers.

Soit X_i la variable aléatoire qui associe à chaque issue (4 lancers de roue) le gain du i^{eme} lancer de roue pour i allant de 1 à 4.

X_1, X_2, X_3 et X_4 ont donc la même loi de probabilité, elle sont donc identiquement distribuées.

2 Somme de variables aléatoires identiquement distribués



Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aléatoires définies sur un univers Ω .

On suppose que ces variables aléatoires sont **indépendantes et identiquement distribuées**, et qu'elles ont **la même loi de probabilité** qu'une variable aléatoire X .

On dit dans ce cas que $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ est un échantillon de taille n de la variable aléatoire X .



Propriétés

Soit $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ la somme d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X , on a alors :

- $E(S_n) = nE(X)$
- $V(S_n) = nV(X)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X)$

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, les quatre variable aléatoire X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes et identiquement distribuées et forment un échantillon de taille 4 de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

x_i	300	100	-400
$P(X = x_i)$	0,5	0,25	0,25

On a donc :

$$E(X) = \left(\frac{1}{2} \times 300\right) + \left(\frac{1}{4} \times 100\right) + \left(\frac{1}{4} \times (-400)\right) = 75$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \left(\frac{1}{2} \times 300^2\right) + \left(\frac{1}{4} \times 100^2\right) + \left(\frac{1}{4} \times (-400)^2\right) - 75^2 = 81875$$

Par conséquent :

- $E(S_4) = 4E(X) = 300$
- $V(S_4) = 4V(X) = 327500$
- $\sigma(S_4) = \sqrt{4} \times \sigma(X) = 150$

Démonstration

En effet, avec les notations de la propriété, on a :

- $E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$
 $= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$
 $= E(X) + E(X) + \dots + E(X)$
 $= nE(X)$
- Les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n étant indépendantes, on a :
 $V(S_n) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$
 $= V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$
 $= V(X) + V(X) + \dots + V(X)$
 $= nV(X)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{V(S_n)} = \sqrt{nV(X)} = \sqrt{n} \times \sigma(X)$

Propriétés

Soit $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X . On a alors :

- $E(M_n) = E(X)$
- $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$
- $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, les quatre variable aléatoire X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes et identiquement distribuées et forment un échantillon de taille 4 de la variable aléatoire X dont

la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

x_i	300	100	-400
$P(X = x_i)$	0,5	0,25	0,25

On a donc :

$$E(X) = 75$$

$$V(X) = 81875$$

Par conséquent :

- $E(M_4) = E(X) = 75$
- $V(M_4) = \frac{81875}{4}$
- $\sigma(M_4) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{81875}}{2}$

Démonstration

En effet, avec les notations de la propriété, on a :

- $E(M_n) = E\left(\frac{1}{n} \times S_n\right) = \frac{1}{n} \times E(S_n) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$
- $V(M_n) = V\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 V(S_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n}$
- $\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)} = \sqrt{\frac{V(X)}{n}} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

3 Application à la loi binomiale

Propriété (admise)

Toute variable aléatoire Y qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ peut s'écrire comme somme d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

Propriété

Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ de paramètre n et p .

On a alors :

- $E(Y) = np$
- $V(Y) = np(1 - p)$
- $\sigma(Y) = \sqrt{np(1 - p)}$

Démonstration

Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

Y peut donc s'écrire comme somme d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p , d'où $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$, d'où :

- $E(Y) = np$

- $V(Y) = np(1 - p)$
- $\sigma(Y) = \sqrt{np(1 - p)}$