Fonctions trigonométriques

Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, l'ensemble de dérivabilité $\mathcal{D}_{f'}$ et calculer la dérivée

1. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sin(x)$
2. $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2+1}$
3. $h(x) = -2\sin(3x+1)$
4. $m(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$

Exercice 2

1. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$
   (a) Etudier la parité de f.
   (b) Déterminer $f'(x)$.
   (c) Etudier la parité de f'.
2. Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin(-x)$
   (a) Etudier la parité de g.
   (b) Déterminer $g'(x)$.
   (c) Etudier la parité de g'.
3. Soit h une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que si h est paire, alors h' est impaire.
   (b) Démontrer que si h est impaire, alors h' est paire.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin(5x+2) = 0$
2. $\sin(2x+3) = \dfrac{1}{2}$
3. $\sin^2(x) = \dfrac{1}{2}$

4. $2\sin^2(x) - 3\sin(x) - 2 = 0$

Exercice 4

Soit f la fonction définie ci-dessous :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x)\sin(x) \end{array}$$

1. Démontrer que f est 2π périodique.
2. Démontrer que $f(x) = -1$ n'a pas de solution sur $]-\pi, \pi]$
3. Que peut-on déduire des deux question précédentes ?

Exercice 5

Dans chacun des cas, déterminer, lorsqu'elle existe, la limite des fonctions suivantes :

1. $$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3\sin(x) - 2 \end{array}$$
2. $$\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2 \end{array}$$
3. $$\begin{array}{rcl} h:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3\sin(x) - 2x \end{array}$$

Exercice 6

1. Les trois questions suivantes sont indépendantes.
   (a) Justifier que pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
   (b) Démontrer que pour tout réel x, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$
   (c) Démontrer que pour tout réel x, $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$
   (d) Démontrer que pour tout réel x, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
2. l'objectif des questions suivantes est de résoudre sur $]-\pi, \pi]$ l'équation :

$$(E) \quad : \quad -2\cos(2x) + 2(\sqrt{3} - 1)\sin(x) + 2 - \sqrt{3} = 0$$

   (a) Montrer que (E) est équivalente à l'équation :

$$4\sin^2(x) + 2(\sqrt{3} - 1)\sin(x) - \sqrt{3} = 0$$

      i. Développer et réduire $(2 + 2\sqrt{3})^2$
      ii. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 + 2(\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$
   (b) En déduire les solution de (E) sur $]-\pi, \pi]$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos(2x) - 1$.
On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$
2. Etudier la parité de f.
3. Déterminer une période de f.
4. Déduire des question précédente que l'on peut restrindre l'étude de f à un intervalle de longueur $\frac{\pi}{2}$ que l'on déterminera.
5. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) \leqslant 0$.
6. déduire des question précédente le tableau de variation de f sur $[-\pi, \pi]$

Exercice 8

Soient a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b\cos(x) + c$$

1. Déterminer a, b et c sachant que la tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse $-\frac{\pi}{2}$ est horizontale et que la tangente à la courbe représentative de f au point B de coordonnées $(0; 3)$ a pour coefficient directeur -2.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -2x + 2\cos(x) + 1$$

   (a) Montrer que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} de α.
   (c) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Soit u et v les suites définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

1. Démontrer que les fonctions suivantes sont positives sur $[0; +\infty[$
   (a) $f(x) = x - \sin(x)$
   (b) $g(x) = -1 + x^2 + \cos(x)$
   (c) $h(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin(x)$
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \leqslant n^4$$

On pourra utiliser les égalités suivantes : $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ et $(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$.

3. Déduire des question précédentes que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n - \frac{1}{6n^2} \leqslant u_n \leqslant v_n$$

4. En déduire que u converge et déterminer sa limite.

Exercice 10

Exercice 11

Exercice 12

Exercice 13

Exercice 14