Fonction exponentielle

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^3$
2. $B = \mathrm{e}^8 + \mathrm{e}^6 \times \mathrm{e}^2$
3. $C = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^6}$
4. $D = \dfrac{\mathrm{e}^8}{\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^2}$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \mathrm{e}^5 \times \mathrm{e}^{-2} \times \mathrm{e}$
2. $B = \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^2$
3. $C = \dfrac{\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^5}$
4. $D = \dfrac{\left(\mathrm{e}^5\right)^2}{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^2}$

Exercice 3

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}$
2. $B = \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x$
3. $C = (\mathrm{e}^x)^3 \times \mathrm{e}^{-2x}$
4. $D = (\mathrm{e}^x)^{-2} \times \mathrm{e}^{3x}$

Exercice 4

Simplifier les expressions suivantes :

1. $E = \mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{-x}$
2. $F = \mathrm{e}^{3x+2} \times \mathrm{e}^{1-2x}$

3. $G = \dfrac{e^{2x+1}}{e^{-2x}}$
4. $H = \dfrac{e^{3x-1}}{e^{2-x}}$

Exercice 5

Simplifier les expressions suivantes :

1. $E = (e^{2x} + e^{-x})^2$
2. $F = (e^{x} + e^{3x}) \times (2e^{-x} + 3e^{-3x})$
3. $G = \dfrac{e^{2x+1}}{e^{-x}} \times e^{4x}$

Exercice 6

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = (e^{x} + e^{-x}) \times 2e^{2x}$
2. $B = (e^{x} + 2) \times (e^{-x} + 2e^{-3x+1})$
3. $C = \dfrac{e^{2x}}{e^{-x+1}} \times e^{x+3}$

Exercice 7

Simplifier les expressions suivantes :

1. $E = (e^{2x} + e^{-x})^2$
2. $F = (e^{3x} + 1) \times (e^{3x} - 1)$
3. $G = \dfrac{e^{-x} \times e^{2x-1}}{e^{x+1}} \times e^{x-3}$

Exercice 8

Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{x} - 1 = 0$
2. $e^{2x} - 1 = 0$
3. $e^{2x} \times e^{x+2} = 1$

Exercice 9

Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{e^{3x+2}}{e^{2x}} - 1 = 0$
2. $e^{3x^2-2x-6} - 1 = 0$

3. $\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)^2=0$

Exercice 10

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $f(x)=2x^2+4-\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. $f(x)=\mathrm{e}^{x}(x-1)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

Déterminer le signe des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{1+\mathrm{e}^{4x}}{x^2+2}$
2. $g(x)=\dfrac{8}{-x^2-2\mathrm{e}^{4x}}$
3. $h(x)=\dfrac{-3}{-\mathrm{e}^{-4x}}$

Exercice 12

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=3\mathrm{e}^{x}-5x^2+3$
2. $g(x)=2x-4\mathrm{e}^{x}+2$
3. $h(x)=\dfrac{1}{x}+x+2\mathrm{e}^{x}+2$

Exercice 13

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\mathrm{e}^{2x+1}$
2. $g(x)=\mathrm{e}^{-x+7}$
3. $h(x)=4\mathrm{e}^{-3x}$
4. $i(x)=-2\mathrm{e}^{3x+2}+3$

Exercice 14

Résoudre les équations suivantes :

1. $(2x-4)\,\mathrm{e}^{x}=0$
2. $(-x-3)\,\mathrm{e}^{3x}=0$
3. $(x-3)\,(2x+1)\,\mathrm{e}^{-x+2}=0$

Exercice 15

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(2x-1)\,\mathrm{e}^{x} > 0$
2. $(-3x-9)\,\mathrm{e}^{3x} < 0$
3. $(x-3)\,(2x+1)\,\mathrm{e}^{-x+2} \geqslant 0$

Exercice 16

Étudiez le signe sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x+2}$
2. $g(x)\,(-x-9)\,\mathrm{e}^{-3x+3}$
3. $h(x) = (2x-3)\,(x+1)\,\mathrm{e}^{x+4}$
4. $i(x) = (2x^2-3x-12)\,\mathrm{e}^{x+4}$

Exercice 17

Démontrer que pour tout réel x :

1. $$(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x})(1+\mathrm{e}^{-3x}) = (\mathrm{e}^{3x}+1)(1-\mathrm{e}^{-3x})\mathrm{e}^{-x}$$
2. $$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+1} + \frac{\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{-2x}+1} + \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}$$

Exercice 18

Déterminer les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\mathrm{e}^{x}$.

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} - x$$

1. Etudier les variations de f et faire le tableau de variation de f.
2. En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$
3. En déduire que pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x} > x$.

Exercice 20

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1.$$

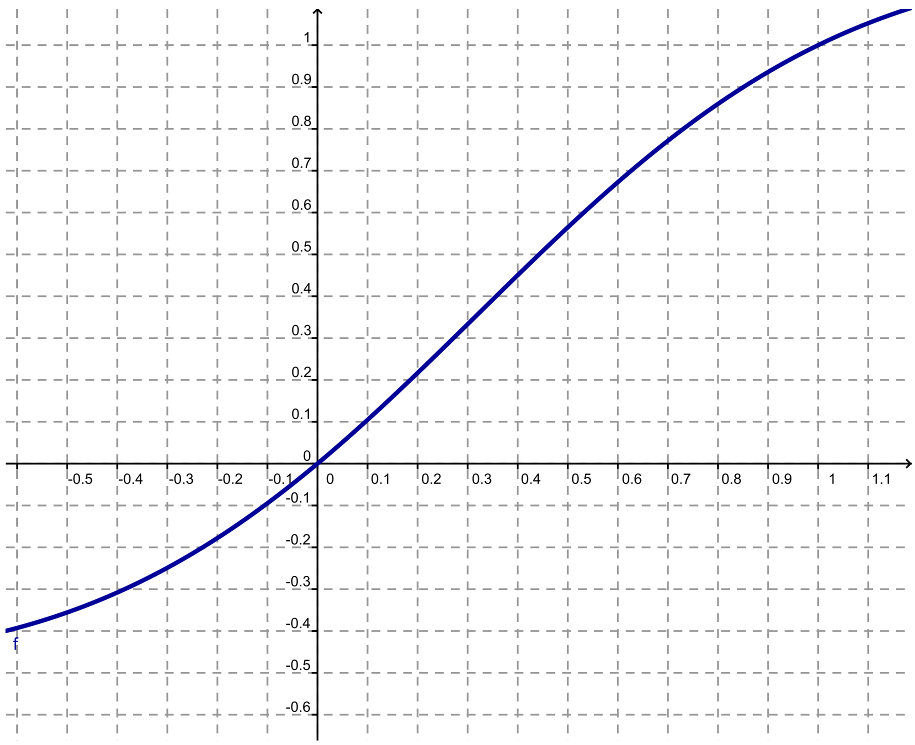
1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}.$$

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée ci-dessous.



On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
   (a) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.
   (b) Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathcal{C})$ sur $[0\,;\,1]$.

Exercice 21

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. En déduire le tableau de variations de g.
3. (a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   (c) Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie 3

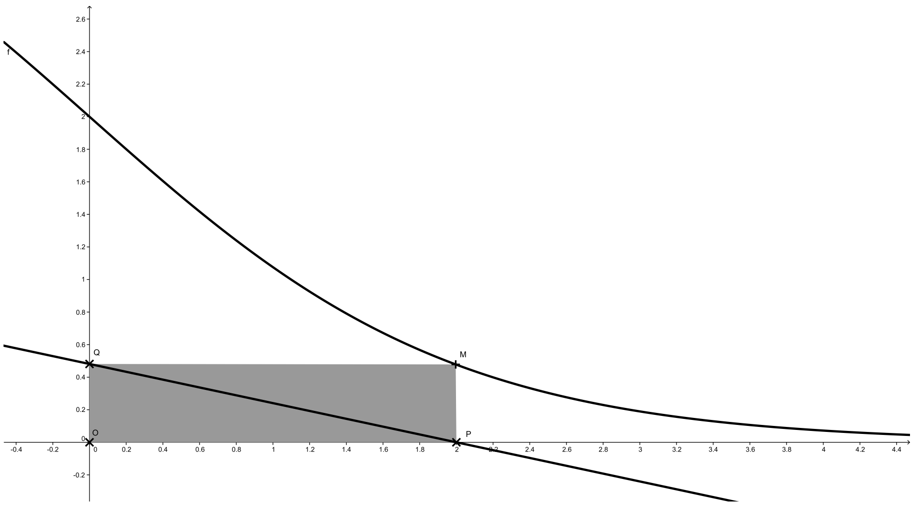
On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$.
On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
La figure est donnée ci-dessous.
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$,

P le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,

Q le point de coordonnées $(0\ ;\ f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 2.
2. Le point M a pour abscisse α.
   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.


Q
M
O
P