Fonction exponentielle

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^3$
2. $B = \mathrm{e}^8 + \mathrm{e}^6 \times \mathrm{e}^2$
3. $C = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^6}$
4. $D = \dfrac{\mathrm{e}^8}{\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^2}$

Correction de l'exercice 1

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^3 \\ &= \mathrm{e}^{4+3} \\ &\boxed{= \mathrm{e}^7} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} B &= \mathrm{e}^8 + \mathrm{e}^6 \times \mathrm{e}^2 \\ &= \mathrm{e}^8 + \mathrm{e}^8 \\ &\boxed{= 2\mathrm{e}^8} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} C &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^6} \\ &= \frac{\mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^6} \\ &= \mathrm{e}^{1-6} \\ &\boxed{= \mathrm{e}^{-5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{\mathrm{e}^8}{\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^8}{\mathrm{e}^{3+2}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^8}{\mathrm{e}^5} \\ &= \mathrm{e}^{8-5} \\ &\boxed{= \mathrm{e}^3} \end{aligned}$$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \mathrm{e}^5 \times \mathrm{e}^{-2} \times \mathrm{e}$
2. $B = \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^2$
3. $C = \dfrac{\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^5}$

4. $D = \dfrac{(e^5)^2}{e \times e^2}$

Correction de l'exercice 2

$$\begin{aligned} A &= e^5 \times e^{-2} \times e \\ &= e^{5-2+1} \\ &\boxed{= e^4} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} B &= e^{-1} + e^3 \times e^2 \\ &= e^{-1} + e^{3+2} \\ &\boxed{= e^{-1} + e^5} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} C &= \frac{e^4}{e^5} \\ &= e^{4-5} \\ &\boxed{= e^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{(e^5)^2}{e \times e^2} \\ &= \frac{e^{2\times 5}}{e^1 \times e^2} \\ &= \frac{e^{10}}{e^3} \\ &= e^{10-3} \\ &\boxed{= e^7} \end{aligned}$$

Exercice 3

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = e^x \times e^{-x}$
2. $B = e^x + 2e^x$
3. $C = (e^x)^3 \times e^{-2x}$
4. $D = (e^x)^{-2} \times e^{3x}$

Correction de l'exercice 3

$$\begin{aligned} A &= e^x \times e^{-x} \\ &= e^{x-x} \\ &= e^0 \\ &\boxed{= 1} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} B &= e^x + 2e^x \\ &\boxed{= 3e^x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (e^x)^3 \times e^{-2x} \\ &= e^{3x} \times e^{-2x} \\ &= e^{3x-2x} \\ &\boxed{= e^x} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} D &= (e^x)^{-2} \times e^{3x} \\ &= e^{-2x} \times e^{3x} \\ &= e^{-2x+3x} \\ &\boxed{= e^x} \end{aligned}$$

Exercice 4

Simplifier les expressions suivantes :

1. $E = e^{2x} \times e^{-x}$
2. $F = e^{3x+2} \times e^{1-2x}$
3. $G = \dfrac{e^{2x+1}}{e^{-2x}}$

4. $H = \dfrac{e^{3x-1}}{e^{2-x}}$

Correction de l'exercice 4

$$\begin{aligned} E &= e^{2x} \times e^{-x} \\ &= e^{2x-x} \\ &\boxed{= e^{x}} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} F &= e^{3x+2} \times e^{1-2x} \\ &= e^{3x+2+1-2x} \\ &\boxed{= e^{x+3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \frac{e^{2x+1}}{e^{-2x}} \\ &= e^{2x+1-(-2x)} \\ &= e^{1} \\ &\boxed{= e} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} H &= \frac{e^{3x-1}}{e^{2-x}} \\ &= e^{3x-1-(2-x)} \\ &= e^{3x-1-2+x} \\ &\boxed{= e^{4x-3}} \end{aligned}$$

Exercice 5

Simplifier les expressions suivantes :

1. $E = (e^{2x} + e^{-x})^2$
2. $F = (e^{x} + e^{3x}) \times (2e^{-x} + 3e^{-3x})$
3. $G = \dfrac{e^{2x+1}}{e^{-x}} \times e^{4x}$

Correction de l'exercice 5

- $E = (e^{2x} + e^{-x})^2$ On utilise ici les identités remarquables $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$$\begin{aligned} &= (e^{2x})^2 + 2e^{2x}e^{-x} + (e^{-x})^2 \\ &= e^{4x} + 2e^{2x-x} + e^{-2x} \\ &\boxed{= e^{4x} + 2e^{x} + e^{-2x}} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} F &= (e^{x} + e^{3x}) \times (2e^{-x} + 3e^{-3x}) \\ &= 2e^{x-x} + 3e^{x-3x} + 2e^{3x-x} + 3e^{3x-3x} \\ &= 2e^{0} + 3e^{-2} + 2e^{2x} + 3e^{0} \\ &= 2 + 3e^{-2} + 2e^{2x} + 3 \\ &\boxed{= 5 + 3e^{-2} + 2e^{2x}} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} G &= \frac{e^{2x+1}}{e^{-x}} \times e^{4x} \\ &= e^{2x+1-(-x)+4x} \\ &\boxed{= e^{7x+1}} \end{aligned}$$

Exercice 6

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = (\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) \times 2\mathrm{e}^{2x}$
2. $B = (\mathrm{e}^{x} + 2) \times (\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-3x+1})$
3. $C = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{-x+1}} \times \mathrm{e}^{x+3}$

Correction de l'exercice 6

1. $$\begin{aligned} A &= (\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) \times 2\mathrm{e}^{2x} \\ &= 2\mathrm{e}^{x+2x} + 2\mathrm{e}^{-x+2x} \\ &\boxed{= 2\mathrm{e}^{3x} + 2\mathrm{e}^{x}} \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} B &= (\mathrm{e}^{x} + 2) \times (\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-3x+1}) \\ &= \mathrm{e}^{x-x} + 2\mathrm{e}^{x-3x+1} + 2\mathrm{e}^{-x} + 4\mathrm{e}^{-3x+1} \\ &= \mathrm{e}^{0} + 2\mathrm{e}^{-2x+1} + 2\mathrm{e}^{-x} + 4\mathrm{e}^{-3x+1} \\ &\boxed{= 1 + 2\mathrm{e}^{-2x+1} + 2\mathrm{e}^{-x} + 4\mathrm{e}^{-3x+1}} \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} C &= \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{-x+1}} \times \mathrm{e}^{x+3} \\ &= \mathrm{e}^{2x-(-x+1)} \times \mathrm{e}^{x+3} \\ &= \mathrm{e}^{3x-1} \times \mathrm{e}^{x+3} \\ &= \mathrm{e}^{3x-1+x+3} \\ &\boxed{= \mathrm{e}^{4x+2}} \end{aligned}$$

Exercice 7

Simplifier les expressions suivantes :

1. $E = (\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-x})^2$
2. $F = (\mathrm{e}^{3x} + 1) \times (\mathrm{e}^{3x} - 1)$
3. $G = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{2x-1}}{\mathrm{e}^{x+1}} \times \mathrm{e}^{x-3}$

Correction de l'exercice 7

1. $E = (\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-x})^2$ On utilise ici les identités remarquables $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   $$\begin{aligned} &= (\mathrm{e}^{2x})^2 + 2\mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{-x} + (\mathrm{e}^{-x})^2 \\ &= \mathrm{e}^{4x} + 2\mathrm{e}^{2x-x} + \mathrm{e}^{-2x} \\ &\boxed{= \mathrm{e}^{4x} + 2\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-2x}} \end{aligned}$$
2. $F = (\mathrm{e}^{3x} + 1) \times (\mathrm{e}^{3x} - 1)$
   $= (\mathrm{e}^{3x})^2 - 1$ On utilise ici les identités remarquables $(a+b)^{(}a-b) = a^2 - b^2$
   $\boxed{= \mathrm{e}^{6x} - 1}$
3. $G = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{2x-1}}{\mathrm{e}^{x+1}} \times \mathrm{e}^{x-3}$

$$= \frac{e^{x-1}}{e^{x+2}} \times e^{x-3}$$

$$= e^{x-1-(x+2)} \times e^{x-3}$$
$$= e^{-3} \times e^{x-3}$$
$$= e^{-3+x-3}$$
$$\boxed{= e^{x-6}}$$

Exercice 8

Résoudre les équations suivantes :

1. $e^x - 1 = 0$
2. $e^{2x} - 1 = 0$
3. $e^{2x} \times e^{x+2} = 1$

Correction de l'exercice 8

1. $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$
   $\Leftrightarrow e^x = e^0$
   $\Leftrightarrow x = 0$
   $\boxed{\text{Donc la solution de l'équation } e^x - 1 = 0 \text{ est } 0.}$
2. $e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1$
   $\Leftrightarrow e^{2x} = e^0$
   $\Leftrightarrow 2x = 0$
   $\Leftrightarrow x = 0$
   $\boxed{\text{Donc la solution de l'équation } e^{2x} - 1 = 0 \text{ est } 0.}$
3. $e^{2x} \times e^{x+2} = 1 \Leftrightarrow e^{2x+x+2} = e^0$
   $\Leftrightarrow 3x + 2 = 0$
   $\Leftrightarrow 3x = -2$
   $\Leftrightarrow x = \frac{-2}{3}$
   $\boxed{\text{Donc la solution de l'équation } e^{2x} \times e^{x+2} = 1 \text{ est } \frac{-2}{3}.}$

Exercice 9

Résoudre les équations suivantes :

1. $\frac{e^{3x+2}}{e^{2x}} - 1 = 0$
2. $e^{3x^2-2x-6} - 1 = 0$
3. $(e^{2x} - 1)^2 = 0$

Correction de l'exercice 9

1. $\dfrac{e^{3x+2}}{e^{2x}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{3x+2}}{e^{2x}} = 1$

$\Leftrightarrow e^{3x+2} = e^{2x}$ Car $e^{2x} > 0$ pour tout réel x

$\Leftrightarrow 3x + 2 = 2x$

$\Leftrightarrow x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$

Donc la solution de l'équation $\dfrac{e^{3x+2}}{e^{2x}} - 1 = 0$ est -2.

2. $e^{3x^2-2x-6} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{3x^2-2x-6} = 1$
$\Leftrightarrow e^{3x^2-2x-6} = e^0$
$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 6 = 0$

Soit Δ le discriminant de $3x^2 - 2x - 6$
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-6)$
$= 76$
$\Delta > 0$, donc $3x^2 - 2x - 6 = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{76}}{6} \approx 1,79 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-2)-\sqrt{76}}{6} \approx -1,12$$

Donc les solutions de l'équation $e^{3x^2-2x-6} - 1 = 0$ sont x_1 et x_2.

3. $\left(e^{2x} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0$
$\Leftrightarrow e^{2x} = 1$
$\Leftrightarrow e^{2x} = e^0$
$\Leftrightarrow 2x = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$

Donc la solution de l'équation $\left(e^{2x} - 1\right)^2 = 0$ est 0.

Exercice 10

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $f(x) = 2x^2 + 4 - \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. $f(x) = e^x(x - 1)$ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 10

1. On peut remarquer que pour tout réel x, $x^2+1>0$. Le dénominateur de f ne s'annule donc jamais et par conséquent f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
   D'autre part : $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=\mathrm{e}^x-1$ et $v(x)=x^2-1$
   d'où $u'(x)=\mathrm{e}^x$ et $v'(x)=2x$
   $$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}$$
   $$=\frac{\mathrm{e}^x\left(x^2+1\right)-\left(\mathrm{e}^x-1\right)\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$
   $$=\frac{\mathrm{e}^x\left(x^2+1\right)-2x\mathrm{e}^x+2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$
   $$\boxed{=\frac{\mathrm{e}^x\left(x^2-2x+1\right)+2x}{\left(x^2+1\right)^2}}$$
2. $f(x)=\dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x)=x^2+1$
   d'où $u'(x)=2x$ et on a :
   $$f'(x)=\frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$$
   $$\boxed{=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}}$$
3. $f'(x)=4x-\dfrac{-1}{x^2}$
   $$\boxed{=4x+\frac{1}{x^2}}$$
4. $f(x)=u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=\mathrm{e}^x$ et $v(x)=x-1$
   d'où $u'(x)=\mathrm{e}^x$ et $v'(x)=1$ et on a :
   $f'(x)=\mathrm{e}^x(x-1)+\mathrm{e}^x\times 1$
   $=\mathrm{e}^x(x-1+1)$
   $\boxed{=x\mathrm{e}^x}$

Exercice 11

Déterminer le signe des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{1+\mathrm{e}^{4x}}{x^2+2}$
2. $g(x)=\dfrac{8}{-x^2-2\mathrm{e}^{4x}}$
3. $h(x)=\dfrac{-3}{-\mathrm{e}^{-4x}}$

Correction de l'exercice 11

1.
   - Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+2>0$
   - Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x>0$ d'où $\mathrm{e}^{4x}+1>0$

   Donc $\boxed{f(x)=\dfrac{1+\mathrm{e}^{4x}}{x^2+2}>0}$ pour tout réel x en tant que quotient de deux nombres positifs.
2.
   - Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{4x}>0$, donc $-x^2-2\mathrm{e}^{4x}<0$

   Donc $\boxed{g(x)=\dfrac{8}{-x^2-2\mathrm{e}^{4x}}<0}$ pour tout réel x.
3.
   - Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{-4x}>0$, donc $-\mathrm{e}^{-4x}<0$

   Donc $\boxed{h(x)=\dfrac{-3}{-\mathrm{e}^{-4x}}>0}$ pour tout réel x en tant que quotient de deux nombres négatifs.

Exercice 12

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=3\mathrm{e}^x-5x^2+3$
2. $g(x)=2x-4\mathrm{e}^x+2$
3. $h(x)=\dfrac{1}{x}+x+2\mathrm{e}^x+2$

Correction de l'exercice 12

1. $f'(x)=3\mathrm{e}^x-5\times 2x$
   $\boxed{=3\mathrm{e}^x-10x.}$
2. $\boxed{g'(x)=2-4\mathrm{e}^x}$
3. $\boxed{h'(x)=\dfrac{-1}{x^2}+1+2\mathrm{e}^x}$

Exercice 13

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\mathrm{e}^{2x+1}$
2. $g(x)=\mathrm{e}^{-x+7}$
3. $h(x)=4\mathrm{e}^{-3x}$
4. $i(x)=-2\mathrm{e}^{3x+2}+3$

Correction de l'exercice 13

1. $\boxed{f'(x)=2\mathrm{e}^{2x+1}}$
2. $g'(x)=(-1)\times\mathrm{e}^{-x+7}$
   $\boxed{=-\mathrm{e}^{-x+7}}$
3. $h'(x)=4\times(-3)\mathrm{e}^{-3x}$

$\boxed{= -12\mathrm{e}^{-3x}}$

4. $i'(x) = -2 \times 3\mathrm{e}^{3x+2}$
   $\boxed{= -6\mathrm{e}^{3x+2}}$

Exercice 14

Résoudre les équations suivantes :

1. $(2x-4)\,\mathrm{e}^{x} = 0$
2. $(-x-3)\,\mathrm{e}^{3x} = 0$
3. $(x-3)\,(2x+1)\,\mathrm{e}^{-x+2} = 0$

Correction de l'exercice 14

1. $(2x-4)\,\mathrm{e}^{x} = 0 \Leftrightarrow 2x-4=0$ Car pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x} \neq 0$
   $\Leftrightarrow 2x = 4$
   $\Leftrightarrow x = 2$
   $\boxed{\text{Donc la solution de l'équation } (2x-4)\,\mathrm{e}^{x} = 0 \text{ est } 2.}$
2. $(-x-3)\,\mathrm{e}^{3x} = 0 \Leftrightarrow -x-3=0$ Car pour tout réel x, $\mathrm{e}^{3x} \neq 0$
   $\Leftrightarrow -x = 3$
   $\Leftrightarrow x = -3$
   $\boxed{\text{Donc la solution de l'équation } (-x-3)\,\mathrm{e}^{3x} = 0 \text{ est } -3.}$
3. $(x-3)\,(2x+1)\,\mathrm{e}^{-x+2} = 0 \Leftrightarrow x-3=0 \quad \text{ou} \quad 2x+1=0$ Car pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x+2} \neq 0$
   $\Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ou } 2x = -1$
   $$\Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ou } x = \frac{-1}{2}$$
   $$\boxed{\text{Donc les solutions de l'équation } (x-3)\,(2x+1)\,\mathrm{e}^{-x+2} = 0 \text{ sont } \frac{-1}{2} \text{ et } 3.}$$

Exercice 15

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(2x-1)\,\mathrm{e}^{x} > 0$
2. $(-3x-9)\,\mathrm{e}^{3x} < 0$
3. $(x-3)\,(2x+1)\,\mathrm{e}^{-x+2} \geqslant 0$

Correction de l'exercice 15

1. $2x-1>0 \Leftrightarrow 2x>1$
   $$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$
   D'où le tableau de signe suivant où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{x}$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
e^{x}		$+$		$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$$\boxed{\text{Donc } (2x-1)\,e^{x} > 0 \text{ si et seulement si } x > \frac{1}{2}}$$

2. $3x - 9 > 0 \Leftrightarrow -3x > 9$
$\Leftrightarrow x < -3$

D'où le tableau de signe suivant où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-3x-9)\,e^{3x}$:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
e^{3x}		$+$		$+$	
$-3x-9$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	

$$\boxed{\text{Donc } (-3x-9)\,e^{3x} < 0 \text{ si et seulement si } x > -3}$$

3. ◦ $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$
   ◦ $2x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > -1$
   $\Leftrightarrow x > \frac{-1}{2}$

D'où le tableau de signe suivant où h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x-3)(2x+1)\,e^{-x+2}$:

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		3		$+\infty$
e^{-x+2}		$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\text{Donc } (x-3)(2x+1)\,e^{-x+2} \geqslant 0 \text{ si et seulement si } x \in \left]-\infty; \frac{-1}{2}\right] \cup [3; +\infty[}$$

Exercice 16

Étudiez le signe sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x+2}$
2. $g(x)\,(-x-9)\,\mathrm{e}^{-3x+3}$
3. $h(x) = (2x-3)\,(x+1)\,\mathrm{e}^{x+4}$
4. $i(x) = (2x^2-3x-12)\,\mathrm{e}^{x+4}$

Correction de l'exercice 16

1. Pour tout réel x, on a :

   - $\mathrm{e}^{-x+2} > 0$
   - $2x+1 > 0 \Leftrightarrow 2x > -1$
     $\Leftrightarrow x > \dfrac{-1}{2}$

   D'où le tableau de signe de f :

x	$-\infty$		$\dfrac{-1}{2}$		$+\infty$
e^{-x+2}		$+$		$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. Pour tout réel x, on a :

   - $\mathrm{e}^{-3x+3} > 0$
   - $-x-9 > 0 \Leftrightarrow -x > 9 \qquad \Leftrightarrow x < -9$

   D'où le tableau de signe de g :

x	$-\infty$		-9		$+\infty$
e^{-3x+3}		$+$		$+$	
$-x-9$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	

3. Pour tout réel x, on a :

   - $\mathrm{e}^{x+4} > 0$
   - $2x-3 > 0 \Leftrightarrow 2x > 3$

$$\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$

- $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

D'où le tableau de signe de h :

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
e^{x+4}		$+$		$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. Pour tout réel x, on a :

   - $e^{x+4}>0$
   - $2x^2-3x-12$ est un polynôme du second degré. Soit Δ son discriminant.
     $\Delta = (-3)^2 - 4\times 2\times(-12) = 105$
     $\Delta > 0$ donc $2x^2-3x-12$ à deux racines x_1 et x_2 et $2x^2-3x-12$ est du signe du coefficient du terme de degré 2 à l'extérieur des racines avec :

$$x_1 = \frac{-(-3)-\sqrt{105}}{4} \approx -1,8 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-3)+\sqrt{105}}{4} \approx 3,3$$

D'où le tableau de signe de i :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
e^{x+4}		$+$		$+$		$+$	
$2x^2-3x-12$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$i(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 17

Démontrer que pour tout réel x :

1. $$(e^{2x}-e^{-x})(1+e^{-3x}) = (e^{3x}+1)(1-e^{-3x})e^{-x}$$

2. $$\frac{e^{-x}}{e^x+1}+\frac{e^{4x}}{e^{2x}+1} = \frac{e^{2x}}{e^{-2x}+1}+\frac{e^{-2x}}{e^{-x}+1}$$

Correction de l'exercice 17

1. d'une part ,
$$\begin{aligned}(e^{2x}-e^{-x})(1+e^{-3x}) &= e^{2x}+e^{2x-3x}-e^{-x}-e^{-x-3x}\\ &= e^{2x}+e^{-x}-e^{-x}-e^{-4x}\\ &= e^{2x}-e^{-4x}\end{aligned}$$
D'autre part :
$$\begin{aligned}(e^{3x}+1)(1-e^{-3x})e^{-x} &= (e^{3x}-e^{3x-3x}+1-e^{-3x})e^{-x}\\ &= (e^{3x}-e^{0}+1-e^{-3x})e^{-x}\\ &= (e^{3x}-1+1-e^{-3x})e^{-x}\\ &= (e^{3x}-e^{-3x})e^{-x}\\ &= e^{3x-x}-e^{-3x-x}\\ &= e^{2x}-e^{-4x}\end{aligned}$$
$$\boxed{\text{Donc } (e^{2x}-e^{-x})(1+e^{-3x})=(e^{3x}+1)(1-e^{-3x})e^{-x}}$$
2. Cette question est assez difficile et demande d'avoir une certaine aisance en calcul littéral avec les fonctions exponentielles ainsi qu'une bonne intuition mathématique.
$$\begin{aligned}\frac{e^{-x}}{e^{x}+1}+\frac{e^{4x}}{e^{2x}+1} &= \frac{e^{-x}\times e^{-x}}{e^{-x}\left(e^{x}+1\right)}+\frac{e^{-2x}\times e^{4x}}{e^{-2x}\left(e^{2x}+1\right)}\\ &= \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+1}+\frac{e^{2x}}{e^{-2x}+1}\end{aligned}$$

Exercice 18

Déterminer les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2e^x$.

Correction de l'exercice 18

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f(x)=u(x)\times v(x)$ avec :
$$u(x)=x^2 \qquad \text{et} \qquad v(x)=e^x$$
d'où : $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$= 2xe^x+x^2e^x$
$= (2+x)\times xe^x$

or, pour tout réel x, on a :
- $e^x>0$
- $2+x>0 \Leftrightarrow x>-2$

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
e^x		$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x$$

1. Etudier les variations de f et faire le tableau de variation de f.
2. En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$
3. En déduire que pour tout réel x, $e^x > x$.

Correction de l'exercice 19

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
   $f'(x) = e^x - 1$.
   D'où :
   $$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow e^x > 1 \\ &\Leftrightarrow e^x > e^0 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \end{aligned}$$
   D'où le tableau de variation suivant, avec $f(0) = e^0 - 0 = 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

2. D'après le tableau de variation, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 1$, $\boxed{\text{donc } f \text{ est positive sur } \mathbb{R}}$.
3. Pour tout réel x,
   $f(x) > 0$
   $e^x - x > 0$

$\boxed{\text{Donc } e^x > x}$

Exercice 20

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

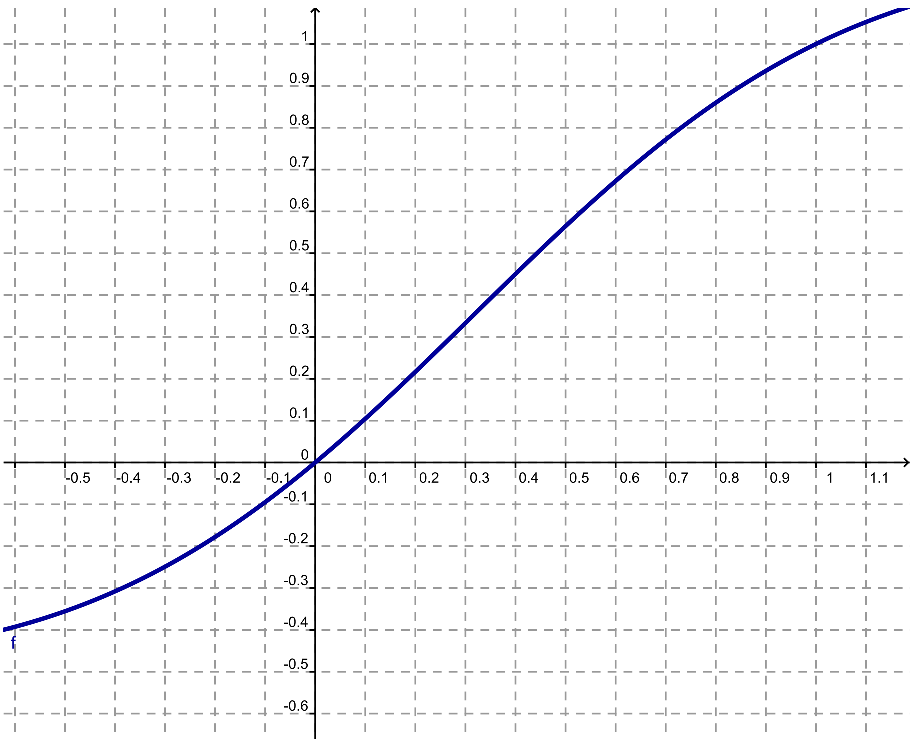
1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}.$$

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée ci-dessous.



On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\,;\,1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

(a) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x-x}$.

(b) Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathcal{C})$ sur $[0\,;\,1]$.

Correction de l'exercice 20

Partie A

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
   $g'(x)=\mathrm{e}^x-1$ D'où :
   $$\begin{aligned} g'(x)>0 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x-1>0\\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x>1\\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x>\mathrm{e}^0\\ &\Leftrightarrow x>0\end{aligned}$$
   D'où le tableau de variation suivant, avec $g(0)=\mathrm{e}^0-0-1=0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

2. D'après le tableau de variation, pour tout réel x, $\boxed{g(x)\geqslant 0}$.
3. Pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$: $\mathrm{e}^x-x-1\geqslant 0$.
   $\mathrm{e}^x-x\geqslant 1$.
   $\boxed{\text{Donc } \mathrm{e}^x-x>0 \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.}$

Partie B

1. - $f(0)=\dfrac{\mathrm{e}^0-1}{\mathrm{e}^0-0}=\dfrac{0}{1}=0$
   - $f(1)=\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-1}=1$
   - f est strictement croissante sur $[0;1]$

   $\boxed{\text{donc, pour tout } x \text{ de } [0\,;\,1],\ f(x)\in[0\,;\,1].}$
2. Soit (D) la droite d'équation $y=x$.

   (a) soit $x\in[0\,;\,1]$
   $$\begin{aligned} f(x)-x&=\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-x}-x\\ &=\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-x}-\frac{x\times(\mathrm{e}^x-x)}{\mathrm{e}^x-x}\\ &=\frac{\mathrm{e}^x-1-x\times(\mathrm{e}^x-x)}{\mathrm{e}^x-x}\\ &=\frac{\mathrm{e}^x-1-x\mathrm{e}^x+x^2}{\mathrm{e}^x-x}\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}(1-x)g(x) &= (1-x)(\mathrm{e}^x - x - 1)\\ &= \mathrm{e}^x - x - 1 - x\mathrm{e}^x + x^2 + x\\ &= \mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x + x^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où } f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}}$$

(b) La courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus de la droite (D) sur un intervalle I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f(x) - x > 0$.
or $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$ et :

- $1 - x > 0 \Leftrightarrow 1 > x$ donc $1 - x > 0$ pour tout $x \in \left[0;1\right[$ et $f(1) = 0$.
- D'après la partie A, $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0;1]$ et $g(0) = 0$.
- D'après la partie A, $\mathrm{e}^x - x > 0$ pour tout $x \in [0;1]$.

d'où le tableau de signe suivant :

x	0		1
$1-x$		$+$	0
$g(x)$	0	$+$	
$\mathrm{e}^x - x$		$+$	
$f(x) - x$	0	$+$	0

$\boxed{\text{Donc la courbe } (\mathcal{C}) \text{ est au dessus de la droite (D) sur } [0;1]}$.

Exercice 21

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. En déduire le tableau de variations de g.
3. (a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   (c) Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie 3

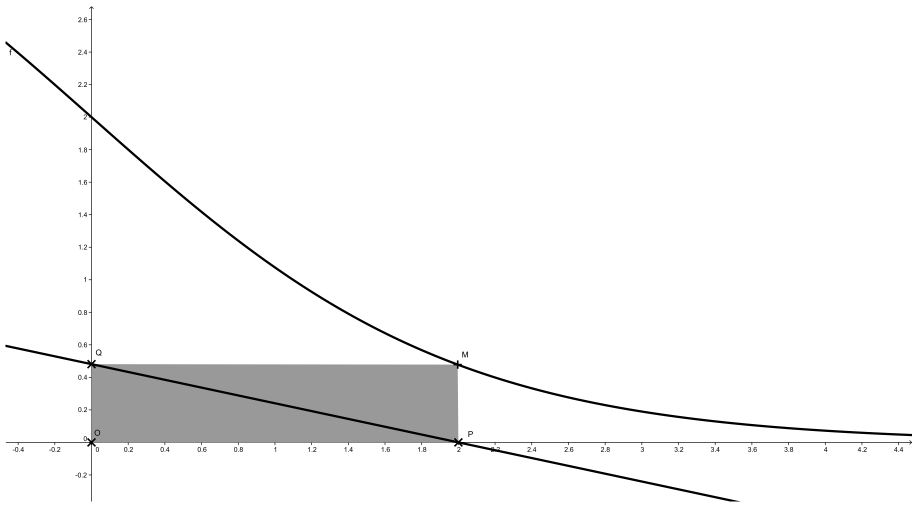
On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$.
On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
La figure est donnée ci-dessous.
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$,

P le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,

Q le point de coordonnées $(0\ ;\ f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 2.
2. Le point M a pour abscisse α.
   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.



Correction de l'exercice 21

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. g est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on a :
   $$\begin{aligned} g'(x) &= \mathrm{e}^x - (1 \times \mathrm{e}^x + x \times \mathrm{e}^x) \\ &= \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x \times \mathrm{e}^x \\ &= -x \times \mathrm{e}^x \end{aligned}$$
2. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, d'où le tableau de variations de g, avec :

$g(0) = \mathrm{e}^0 - 0 \times \mathrm{e}^0 + 1 = 2$

x	0		$+\infty$
$-x$	0	$-$	
e^x		$+$	
$g'(x)$	0	$-$	
g	2	$\searrow$	

3. (a) ◦ $g(0) = 2$
   ◦ $g(1) = \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^2 + 1 = -\mathrm{e}^2 + 1 \approx -6,4$
   ◦ $0 \in [-6,4; 2]$

   Donc, d'après le tableau de variation, la courbe représentative de g coupe une seule fois l'axe des abscisses et par conséquent que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution α.

   (b) À l'aide de la calculatrice, $\alpha \approx 1,28$.

   (c) $g(\alpha) = 0$
   $\mathrm{e}^\alpha - \alpha\mathrm{e}^\alpha + 1 = 0$
   $\mathrm{e}^\alpha - \alpha\mathrm{e}^\alpha = -1$
   $\mathrm{e}^\alpha (1 - \alpha) = -1$
   $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{-1}{1-\alpha}$
   $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

4. D'après les questions précédentes, on a :

x	0	α	$+\infty$
g	2 $\searrow$	0	$\searrow$

Donc, d'après le tableau de variation précédent :
◦ $g(x) > 0$ pour $x \in [0; \alpha[$.
◦ $g(\alpha) = 0$
◦ $g(x) < 0$ pour $x \in]\alpha; +\infty[$.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. $A(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 4x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x + 1$
   d'où $u'(x) = 4$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$, ce qui donne :
   $$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{4 \times (\mathrm{e}^x + 1) - 4x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} \\ &= \frac{4\mathrm{e}^x + 4 - 4x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} \\ &= \frac{4 \times (\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} \\ &= \frac{4 \times g(x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} \end{aligned}$$
   Or $4 > 0$ et pour tout $x \in [0~;~+\infty[$, $(\mathrm{e}^x + 1)^2 > 0$.
   $\boxed{\text{Donc } A'(x) \text{ est du même signe que } g(x) \text{ pour tout } x \in \$[0~;~+\infty[.}$
2. d'après les questions précédentes, on a le tableau de variation suivant, :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
A	0	$\nearrow$	$A(\alpha)$	$\searrow$	

Partie 3

1. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du rectangle $OPMQ$.
   $$\begin{aligned} \mathcal{A} &= OP \times OQ \\ &= x \times f(x) \\ &= \frac{4x}{\mathrm{e}^x + 1} \\ &= A(x) \end{aligned}$$
   Donc, d'après le résultat de la partie 2, l'aire du triangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
2. Le point M a pour abscisse α. Deux droites ayant le même coefficient directeur sont parallèles, or :
   - La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ a pour coefficient directeur $f'(\alpha) = \dfrac{-4\mathrm{e}^\alpha}{(\mathrm{e}^\alpha + 1)^2}$.
   - La droite (PQ) a pour coefficient directeur $\dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{f(\alpha) - 0}{0 - \alpha} = \dfrac{-f(\alpha)}{\alpha}$

or :

$$
\begin{aligned}
f'(\alpha) - \left(\frac{-f(\alpha)}{\alpha}\right) &= \frac{-4e^{\alpha}}{\left(e^{\alpha}+1\right)^2} - \frac{-4}{\alpha\left(e^{\alpha}+1\right)} \\
&= \frac{-4\alpha e^{\alpha}}{\alpha\left(e^{\alpha}+1\right)^2} - \frac{-4\left(e^{\alpha}+1\right)}{\alpha\left(e^{\alpha}+1\right)^2} \\
&= \frac{-4\alpha e^{\alpha} + 4\left(e^{\alpha}+1\right)}{\alpha\left(e^{\alpha}+1\right)^2} \\
&= \frac{4 \times \left(-\alpha e^{\alpha} + e^{\alpha} + 1\right)}{\alpha\left(e^{\alpha}+1\right)^2} \\
&= \frac{4 \times g(\alpha)}{\alpha\left(e^{\alpha}+1\right)^2} \\
&= 0 \qquad \text{car } g(\alpha) = 0
\end{aligned}
$$

Donc $f'(\alpha) = \dfrac{-f(\alpha)}{\alpha}$ et par conséquent $\boxed{\text{(T) est parallèle à la droite } (PQ).}$