Fonction Exponentielle

1 Définition

Propriété

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$.
On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$

Démonstration

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) \times f(-x)$
g est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \times f(-x) + f(x) \times \big(- f'(-x) \big) \\ &= f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc g est constante et par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(0)$, d'où :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \times f(-x) = 1$
Donc, par contraposition, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0}$.

Définition

Il **existe une unique** fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est égale à sa dérivée et qui prend la valeur 1 en 0. Cette fonction (noté exp) est appelée fonction exponentielle.
Donc pour tout réel x :

$$\exp'(x) = \exp(x) \qquad \text{et} \qquad \exp(0) = 1$$

L'existence d'une telle fonction est **admise**.

Démonstration

Démonstration de l'unicité, l'existence étant admise
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{\exp(x)}$
Remarque : *g est bien définie sur $\mathbb{R}$, en effet on a $\exp(0) = 1$, et pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$, donc d'après la première proposition pour tout $x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0$*
g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f'(x) \times \exp(x) - f(x) \times \exp'(x)}{\big(\exp(x)\big)^2} \\ &= \frac{f(x) \times \exp(x) - f(x) \times \exp(x)}{\big(\exp(x)\big)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc g est constante et par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(0) = \dfrac{f(0)}{\exp(0)} = 1$, d'où :

$\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{f(x)}{\exp(x)} = 1$

et par conséquent, pour tout réel x, on a $\boxed{f(x) = \exp(x)}$.
D'où l'unicité.

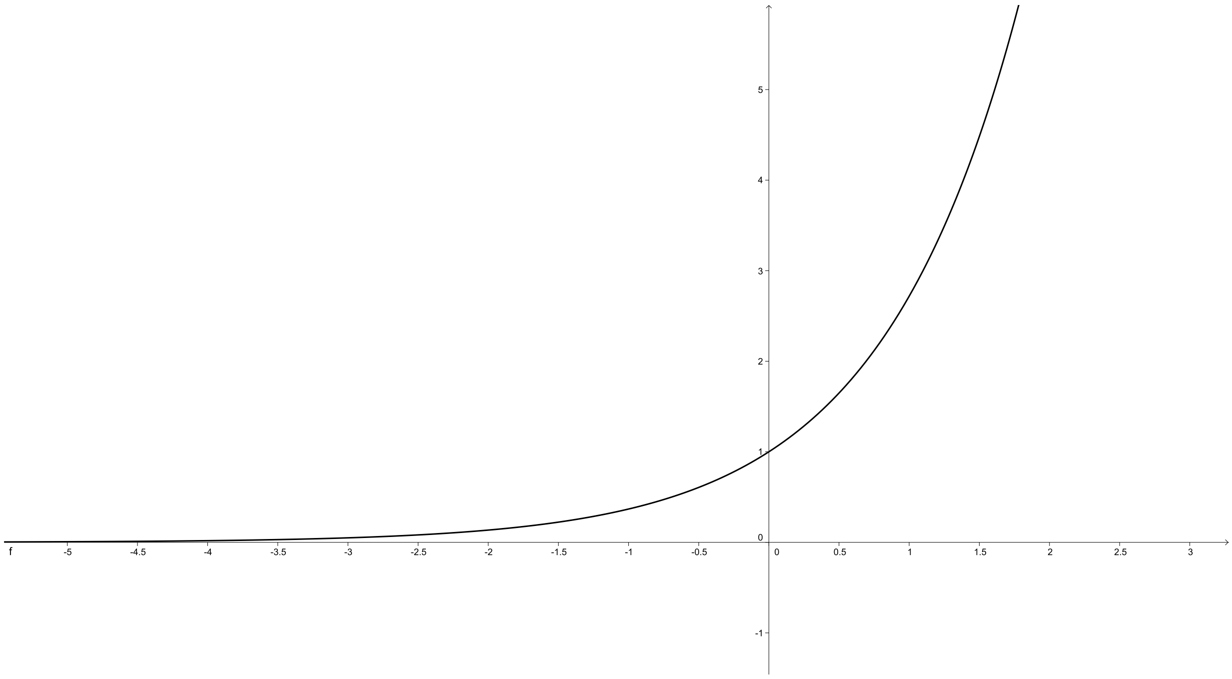
2 Propriétés et représentation graphique

Propriété

La fonction exponentielle est strictement positives sur $\mathbb{R}$ (C'est à dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$), et par conséquent, elle strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

On sait que pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$ et que $\exp(0) = 1 > 0$.
On admet que pour tout réel x, on a $\exp(x) > 0$.
La fonction exponentielle étant égale à sa dérivée, elle a une dérivée strictement positive et par conséquent est strictement croissante.



Propriétés Admises

- Pour tout réels a et b, $\exp(a) = \exp(b)$ si et seulement si $a = b$
- Pour tout réels a et b, $a < b$ si et seulement si $\exp(a) < \exp(b)$

Exemples

- Soit $x \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned}\exp(2x+1) - \exp(3x) = 0 &\Leftrightarrow \exp(2x+1) = \exp(3x)\\ &\Leftrightarrow 2x+1 = 3x\\ &\Leftrightarrow 1 = x\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\exp(x^2+x-1) = 1 &\Leftrightarrow \exp(x^2+x-1) = \exp(0)\\ &\Leftrightarrow x^2+x-1 = 0\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de x^2+x-1
$\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-1) = 5$.
$\Delta > 0$, donc l'équation $x^2+x-1=0$ admet deux uniques solutions qui sont :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Donc les solutions de l'équation $\exp(x^2+x-1)=1$ sont $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Propriété

Soient a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \exp(ax+b)$$

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = a\times\exp(ax+b)$$

Démonstration

D'après le cours sur la dérivation, la dérivée de $x\mapsto g(ax+b)$ est $x\mapsto a\times g'(ax+b)$, donc :
$f'(x) = a\times\exp'(ax+b) = a\times\exp(ax+b) = \mathrm{e}^{ax+b}$

3 Propriétés algébriques et nouvelle notation

Propriété

1. Pour tout réels x et y, $\exp(x+y) = \exp(x)\times\exp(y)$
2. Pour tout réel x, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
3. Pour tout réels x et y, $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
4. Pour tout réel x et pour tout entier relatif n, $(\exp(x))^n = \exp(nx)$

Exemple

Soit $x\in\mathbb{R}$

- $\dfrac{\exp(2x+1)}{\exp(x)} = \exp(2x+1-x) = \exp(x+1)$
- $\dfrac{\exp(2x)\times\big(\exp(x+1)\big)^2}{\exp(3x} = \exp\big(2x+2\times(x+1)-3x\big) = \exp(x+3)$

Démonstration

1. Soit $y \in \mathbb{R}$.

   Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x) \times \exp(y)}$.

   g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la dérivation du quotient de deux fonctions ainsi que la dérivation de la fonction $x \to f(ax+b)$ qui est $x \to a \times f'(ax+b)$ on obtient :

   $$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1 \times exp'(x+y) \times \exp(x) \times \exp(y) - \exp(x+y) \times \exp(x) \times \exp(y)}{\big(\exp(x) \times \exp(y)\big)^2} \\ &= \frac{exp(x+y) \times \exp(x) \times \exp(y) - \exp(x+y) \times \exp(x) \times \exp(y)}{\big(\exp(x) \times \exp(y)\big)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Donc g est une fonction constante et par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = g(0)$, c'est à dire :

   $$\begin{aligned} \frac{\exp(x+y)}{\exp(x) \times \exp(y)} &= \frac{\exp(0+y)}{\exp(0) \times \exp(y)} \\ &= \frac{\exp(y)}{1 \times \exp(y)} \\ &= \frac{\exp(y)}{\exp(y)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

   D'où, pour tout réels x et y, on a $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)}$

2. pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

   $\exp(x-x) = \exp(x) \times \exp(-x)$ d'après 1)

   $\exp(0) = \exp(x) \times \exp(-x)$

   $1 = \exp(x) \times \exp(-x)$

   $$\boxed{\text{Donc, pour tout } x \in \mathbb{R},\ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}}$$

3. Soient x et y deux réels.

   $$\begin{aligned} \exp(x-y) &= \exp(x+(-y) \\ &= \exp(x) \times \exp(-y) \quad \text{d'après 1)} \\ &= \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} \quad \text{d'après 2)} \end{aligned}$$

   $$\boxed{\text{Donc pour tous réels } x \text{ et } y, \text{ on a } \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}}$$

4. Admise

Pour tout entier n dans $\mathbb{Z}$, $\exp(n) = \exp(1 \times n) = (\exp(1))^n$ d'après le dernier point de la propriété précédente.

On notera **e** le réel $\exp(1)$. On a alors pour tout n dans $\mathbb{Z}$, $\exp(n) = \mathrm{e}^n$

Par convention, pour tout réel x, on note e^x au lieu de $\exp(x)$.

On a avec cette nouvelle notation : $\mathrm{e} \approx 2,718$

Avec cette nouvelle notation, les propriétés précédentes s'écrivent :

Propriété

1. $e^0 = 1$
2. Pour tout réels x et y, $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$
3. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
4. Pour tout réels x et y, $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
5. Pour tout réel x et pour tout entier relatif n, $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$

Remarque

Soit a un réel et (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^{na}$
On a alors pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \mathrm{e}^{(n+1)a} = \mathrm{e}^{na+a} = \mathrm{e}^{na} \times \mathrm{e}^a = u_n \times \mathrm{e}^a$$

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison e^a et de premier terme $u_0 = \mathrm{e}^{0\times a} = \mathrm{e}^0 = 1$.