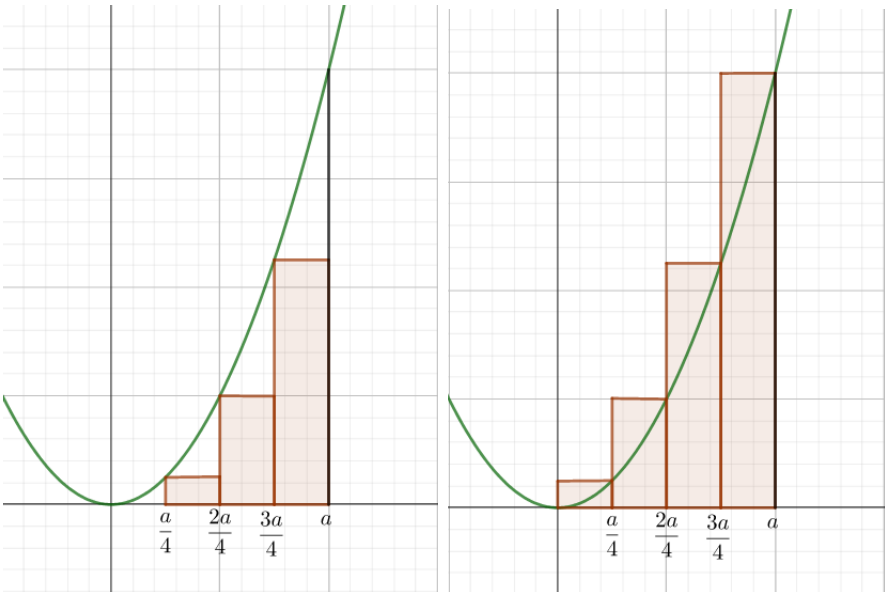
Intégration - introduction

I Aire sous une parabole

Soit a un réel.
On cherche à calculer l'aire comprise entre la comprise entre la courbe représentative de la fonction carré, l'axe des abscisse et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.
On note $\int_0^a x^2 dx$ cette aire.
Pour cela, on encadre tout d'abord l'aire recherchée par des rectangles comme dans les figures ci-dessous.



1. Donner un encadrement de $\int_0^a x^2 dx$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour diminuer la longueur de l'encadrement, on veut minorer cette aire par $n-1$ rectangle et la majorée par n rectangle.
   Donner alors un encadrement de $\int_0^a x^2 dx$ en fonction de n.
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(\frac{ka}{n} \right)^2 \times \frac{a}{n} \right)$$

   et

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{ka}{n} \right)^2 \times \frac{a}{n} \right)$$

(a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(b) En déduire u_n et v_n en fonction de n.

(c) Déterminer les limites de u_n et v_n

(d) En déduire $\displaystyle\int_0^a x^2 dx$.

II Aire sous la courbe représentative de la fonction exponentielle

Soit a un réel.
On cherche à calculer l'aire comprise entre la comprise entre la courbe représentative de la fonction exponentielle, l'axe des abscisse et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.
On note $\displaystyle\int_0^a \mathrm{e}^x dx$ cette aire.

1. En utilisant la même méthode que dans la partie I, déterminer deux suites suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n \leqslant \int_0^a \mathrm{e}^x dx \leqslant v_n$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

(a) Montrer que

$$u_n = \frac{a}{n} \times \frac{1 - \mathrm{e}^a}{1 - \mathrm{e}^{\frac{a}{n}}}$$

On pourra utiliser la somme des n premiers termes d'une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

(b) De même, déterminer v_n en fonction de n.

3. (a) Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

(b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\frac{a}{n}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{a}{n}}} \right)$

(c) En déduire les limites de u_n et v_n

4. Déduire des questions précédentes $\displaystyle\int_0^a \mathrm{e}^x dx$.