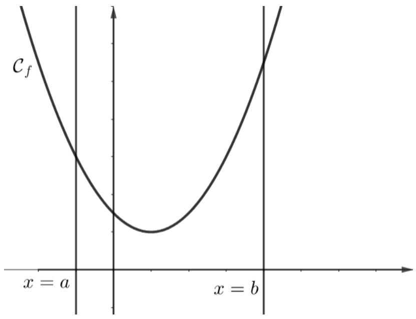
Intégrale de fonction

I Intégrale d'une fonction continue et de signe constant

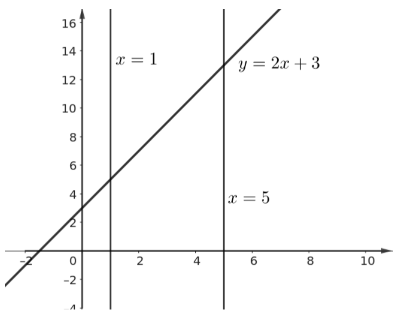
Définition

Intégrale d'une fonction continue et positive.
Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$ et f une fonction continue et positive sur $[a;b]$.
L'intégrale de a à b de f, noté $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, est l'aire comprise entre les droites d'équation $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f.
Cette aire est exprimée en unité d'aire.



Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$.
Calculer $\displaystyle\int_1^5 f(x)dx$.



Pour tout $x \in [1;5]$, $f(x) > 0$, donc $\displaystyle\int_1^5 f(x)dx$ est l'aire du domaine, en unités d'aires, compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 5$, donc :

$$\int_1^5 f(x)dx = (5-1) \times \frac{f(1)+f(5)}{2} = 4 \times \frac{5+13}{2} = 36$$

Remarque

Dans $\displaystyle\int_1^5 f(x)dx$, x joue le rôle d'une variable locale, on peut la remplacer par d'autres lettres. D'où :

$$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^5 f(t)dt = \int_1^5 f(u)du$$

Propriété

Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$ et f une fonction continue sur $[a;b]$ et telle que pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant 0$

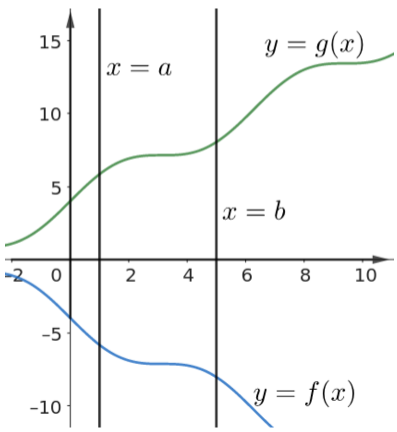
Dans ce cas, l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b \big(-f(x)\big)dx$$

Démonstration

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a;b]$ et telle que pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant 0$

Soit $\mathcal{A}$ l'aire comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Alors la fonction définie sur $[a;b]$ par $g(x) = -f(x)$ est positive sur $[a;b]$ et on a, par symétrie, :

$$\mathcal{A} = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(-f(x)\big)dx$$

Définition

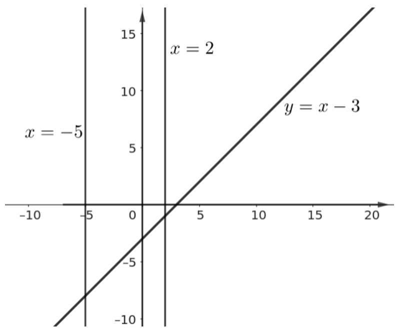
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a; b]$.
Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq 0$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = -\mathcal{A}$$

où $\mathcal{A}$ est comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droite d'équation $x = a$ et $x = b$.
On dit alors que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 3$. Calculer $\displaystyle\int_{-5}^{2} f(x)dx$.



Pour tout $x \in [-5; 2]$, $f(x) < 0$, donc :

$$\int_{-5}^{2} f(x)dx = -\left(7 \times \frac{8+1}{2}\right) = -\frac{63}{2}$$

II Intégrale et primitive

Propriété

Soit f une fonction continue et de signe constant sur l'intervalle $[a; b]$.
La fonction F définie sur $[a; b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur $[a; b]$ et pour tout x de $[a; b]$, $F'(x) = f(x)$. C'est à dire que F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
La fonction $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$, définie sur $\mathbb{R}$, étant une primitive de f, il existe un réel k tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \frac{x^3}{3} + k$$

or $F(1) = 0$, donc $\dfrac{1}{3} + k = 0$, d'où $k = \dfrac{-1}{3}$.
Donc $\displaystyle\int_1^x f(t)dt = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$

Démonstration

On démontre cette propriété dans le cas d'une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle $[a;b]$.
Soient f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle $[a;b]$ et F_a la fonction définie sur $[a;b]$ par :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Démontrons que F_a est une primitive de f sur $[a;b]$

- Soient $x \in [a;b]$ et $h > 0$ tel que $x + h \in [a;b]$.
  d'après la relation de Chasles,
  $F(a+h) = \displaystyle\int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt.$
  Donc $F(x+h) = F(x) + \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt.$
  ou encore $F(x+h) - F(x) = \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt.$
  or f est croissante sur $[a;b]$ et $h > 0$, donc l'aire comprise entre la courbe représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ vérifie l'inégalité :

  $$h \times f(x) \leqslant \int_x^{x+h} f(t)dt \leqslant h \times f(x+h)$$

  d'où :

  $$f(x) \leqslant \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leqslant f(x+h)$$

  f étant continue sur $[a;b]$, on a $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, donc par encadrement :

  $$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

- On montre de même que pour tout $x \in [a;b]$ et tout $h < 0$ tel que $x + h \in [a;b]$ on a :

  $$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

d'où
$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$
Donc F_a est dérivable sur $[a;b]$ et que pour pour tout $x\in[a;b]$, $F_a'(x)=f(x)$, c'est à dire que F_a est une primitive de f sur $[a;b]$.
D'autre part, $F_a(a)=\int_a^a f(t)dt=0$.
Donc F_a est **la** primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

Propriété

Soit f une fonction continue et de signe constant sur l'intervalle $[a;b]$ et F une primitive quelconque de f sur $[a;b]$.
Alors :
$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

Exemple

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 x^3dx &= \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^2\\ &=\frac{2^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}\\ &=4-\frac{1}{4}\\ &=\frac{15}{4}\end{aligned}$$

Démonstration

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ et F une primitive quelconque de f.
La fonction $x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)dt$, définie sur $[a;b]$, étant la primitive de f qui s'annule en a, il existe un réel k tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $\displaystyle\int_a^x f(t)dt=F(x)+k$.
or $\displaystyle\int_a^a f(t)dt=0$, donc $F(a)+k=0$ et par conséquent $k=-F(a)$, donc :
$$\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$$
ou encore, en substituant x par b :
$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

III Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Propriété - (Admis)

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
L'intégrale de f sur $[a;b]$ est le réel défini par :

$$\int_a^b f(x)dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a;b]$.

Exemple

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{4}\left(\frac{1}{x+3} - 2x\right)dx &= \big[\ln(x+3) - x^2\big]_{-2}^{4} \\ &= \ln(4+3) - 4^2 - \big(\ln(-2+3) - (-2)^2\big) \\ &= \ln(7) - 16 - \big(\ln(1) - 4\big) \\ &= \ln(7) - 12\end{aligned}$$

IV Propriété de l'intégrale

Propriété

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Démonstration

En effet, f étant continue sur I, elle admet une primitive F et on a :

$$\int_a^a f(x)dx = \big[F(x)\big]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

Propriété - Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions définies et continue sur $[a;b]$ et λ un réel.

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + g(x)\big)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

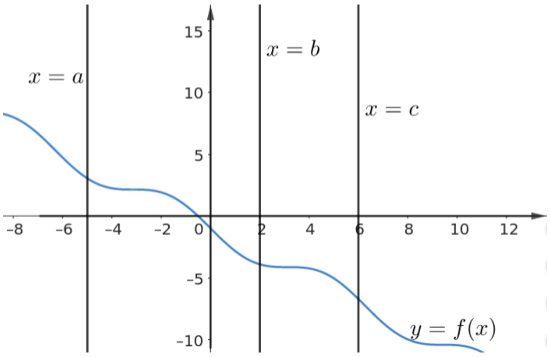
Exemple

Démonstration

Propriété - Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur I.
Pour tous réels a, b et c de I :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$



Exemple

$$\begin{aligned}\int_{-1}^5 (x-1)dx &= \int_{-1}^1 (x-1)dx + \int_1^5 (x-1)dx \\ &= -\frac{2\times 2}{2} + \frac{4\times 4}{2} \\ &= -2+8 \\ &= 6\end{aligned}$$

Démonstration

Remarque

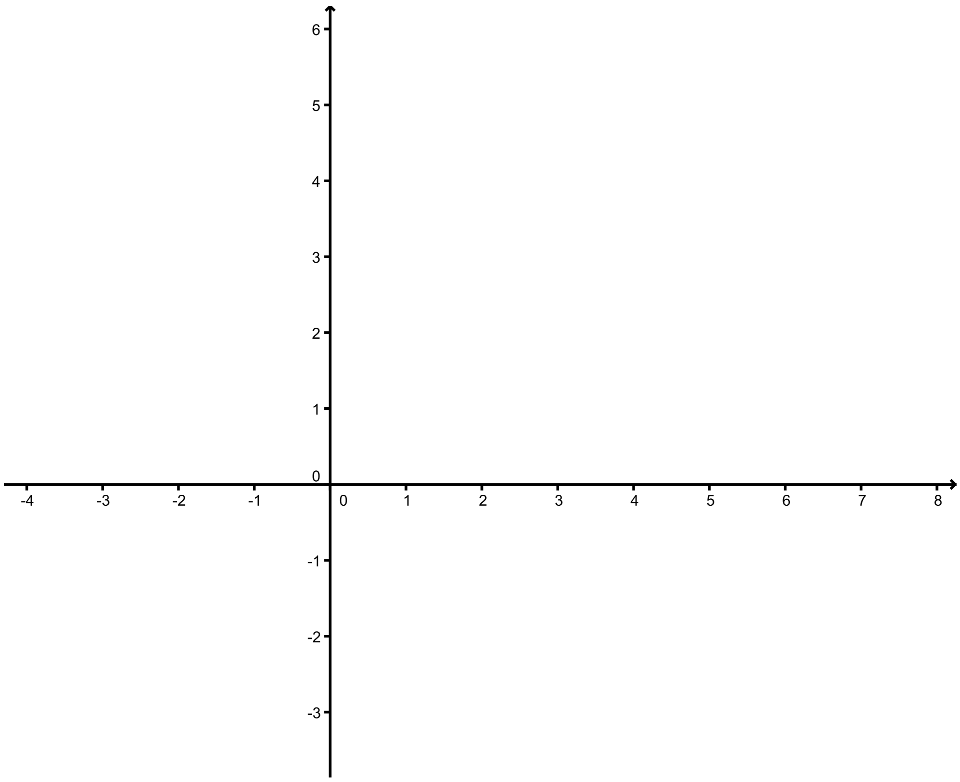
D'après la relation de Chasles,
$\int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx.$
or $\int_a^a f(x)dx = 0$
Donc $0 = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx.$

C'est à dire $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Propriété Conservation de l'ordre

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$

- Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$
- Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$



Exemple

Démonstration

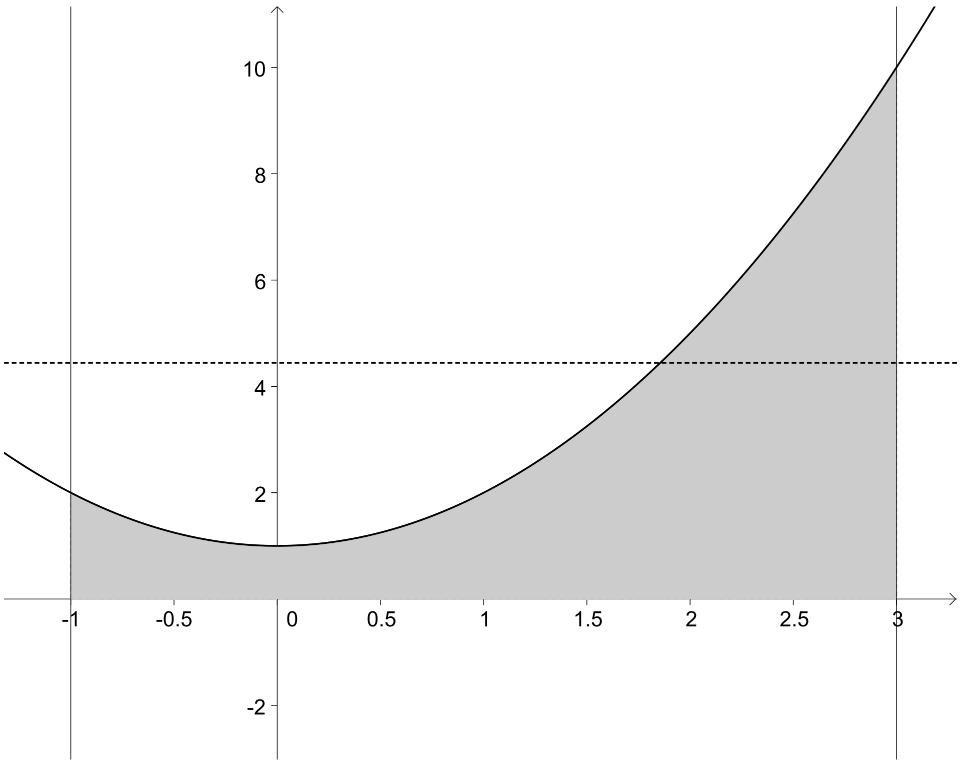
V Intégration par parties

VI Valeur moyenne d'une fonction

Définition

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a; b]$.
La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ de la fonction f est le réel m défini par :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$



Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 2$. Calculer la valeur moyenne de f sur $[-1; 7]$