Concentration et loi des grands nombres

Exercice 1

Dans les cas suivants, déterminer si on peut appliquer l'inégalité de Markov. Justifiez.

1. Nombre de notes au dessus de la moyenne.
2. Montant d'argent disponible sur un compte en banque.
3. Temps d'attente en ligne.
4. Numéro d'étage d'un immeuble avec sous-sol.

Exercice 2

Majorez la probabilité demandée dans les cas suivants, où X est une variable aléatoire positive ou nulle.

1. $P(X \geqslant 1)$ avec $E(X) = 0,5$
2. $P(X \geqslant 24)$ avec $E(X) = 6$
3. $P(X \geqslant 4)$ avec $E(X) = \dfrac{4}{3}$

Exercice 3

Dans un immeuble, l'ascenseur reste en moyenne deux minutes au rez-de-chaussée avant d'être sollicité à nouveau.
majorer la probabilité que l'ascenseur reste au rez de chaussée plus de 5 minutes.

Exercice 4

La température aux Maldives est de $28,4C$. On suppose que la température n'est jamais négative.
majorer la probabilité que la température soit supérieure ou égale à $34C$ un jour donné.

Exercice 5

Majorer la probabilité d'avoir un écart à la moyenne supérieur ou égale à 2 lorsque $V(X) = 1$.

Exercice 6

majorer la probabilité demandée dans les cas suivants :

1. $P\big(|X - E(X)| \geqslant 2\big)$ avec $V(X) = 2$.
2. $P\big(|X - E(X)| \geqslant 20\big)$ avec $V(X) = 10$.
3. $P\big(|X - E(X)| \geqslant 7\big)$ avec $V(X) = 12$.
4. $P\big(\{X \leqslant 3\} \cup \{X \geqslant 17\}\big)$ avec $E(X) = 10$ et $V(X) = 5$.

Exercice 7

On considère la variable aléatoire Xdont la loi de probabilité est la suivante :

- $P\big(\{X = 1\}\big) = 0,6$
- $P\big(\{X = 4\}\big) = 0,3$
- $P\big(\{X = 10\}\big) = 0,1$

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Calculer $P\big(|X - E(X)| \geqslant 2\big)$
3. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $\delta = 2$ et comparer le résultat obtenu à la question 2

Exercice 8

Sur les vingt matchs précédents, une équipe de rugby a marqué 60 essais.
On choisit un match au hasard et on note X la variable aléatoire associant à chaque match le nombre d'essais marqués.

1. Que vaut l'espérance de X.
2. On suppose que la variance est égale à 0,67.
   Majorer la probabilité que l'écart entre le nombre d'essais marqués et la moyenne soit supérieure ou égale à 1.
3. Minorer la probabilité que l'écart entre le nombre d'essais marqués et la moyenne soit strictement inférieure à 2.

Exercice 9

On effectue n tirages avec remise d'une carte d'un jeu de 52 cartes.
pour le i^{ime} tirage, on note X_i, la variable aléatoire valant 1 si la carte est un pique et 0 sinon.

1. Donner l'espérance et la variance de X_i.
2. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire moyenne $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$
3. Quelle doit être la valeur de n pour que la probabilité de s'écarter de l'espérance de M_n de plus de 0,1 soit inférieure à 0,05 ?

Exercice 10

On choisit au hasard un match de la saisons de foot d'une équipe.
On considère une variable aléatoire qui a chaque match associe le nombre de but marqués.
Un analyste affirme : "Grâce à l'inégalité de Markov, je peux dire que la probabilité que l'équipe marque au moins deux but est inférieure à 70%".
Trouver alors le nombre moyen de buts marqués par match par l'équipe.

Exercice 11

Soit X une variable aléatoire aléatoire positive telle que $E(X) = a$ avec a > 2.
montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $P(X \geqslant a^n) \leqslant \dfrac{1}{2}$

Exercice 12

Soit X une variable aléatoire positive.

1. Soit k un entier naturel non nul.
   Montrer que
   $$P\big(X \geqslant kE(X)\big) \leqslant \frac{1}{k}$$
2. En déduire, sans calcul, que moins de 10% des salariés gagnent plus de 10 fois le salaire moyen.

Exercice 13

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile est p.
Soit X la variable aléatoire associant à chaque issues 1 si le résultat est pile et 0 sinon.
Soit a un réel strictement positif.
Déterminer la valeur de p pour laquelle le majorant de $P\big(|X - E(X)| \geqslant a\big)$ est le plus grand.

Exercice 14

des clients estime que le temps d'attente en magasin varie trop fortement selon les périodes.
Le gérant décide donc de vérifier cette impression.
Il mesure que le temps d'attente moyen de ses clients est de 12 minutes et que la probabilité qu'un client attende strictement entre 9 et 15 minutes est de 0.55.
Que peut-il en deduire sur la valeur minimale de l'écart type du temps d'attente de ses clients ?

Exercice 15

On considère un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
On lance n fois le dé.
Soit X la variable aléatoire associant à chaque issue le nombre de 1 obtenus.

1. Déterminer l'espérance te la variance de X.
2. Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
   (a) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minorer la probabilité de l'événement de l'événement $|X - \dfrac{n}{6}| < \dfrac{n}{100}$

(b) En déduire le nombre de lancers nécessaires pour que la fréquence d'apparition du 1 au cours de ces n lancers soit dans l'intervalle $\left]\frac{n}{6}-\frac{n}{100}\ ;\ \frac{n}{6}+\frac{n}{100}\right[$, avec une certitude d'au moins 95%.

3. Avec l'inégalité de concentration.
Soient k un entier naturel compris entre 1 et n, et X_k la variable aléatoire qui associe 1 si le résultat du k^{ime} lancer et 1 et 0 sinon.

(a) Déterminer l'espérance te la variance de X.

(b) Donner en fonction de $X_1, X_2, ..., X_n$ l'expression de la variable aléatoire moyenne.

(c) En déduire en utilisant la loi de concentration le nombre de lancers nécessaires pour que la fréquence d'apparition du 1 au cours de ces n lancers soit dans l'intervalle $\left]\frac{n}{6}-\frac{n}{100}\ ;\ \frac{n}{6}+\frac{n}{100}\right[$, avec une certitude d'au moins 95%.

Exercice 16

Exercice 17