Concentration et loi des grands nombres

I Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Théorème - Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire réelle positive ou nulle d'espérance μ.

$$\text{pout tout } \delta > 0, P\big(X \geqslant \delta\big) \leqslant \frac{\mu}{\delta}$$

Exemple

En 2015, le salaire brut mensuel moyen en france était de 2442 euros. On choisit un salarié au hasard et on note X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le salaire du salarié.
Les salaires étant positifs, X est une variable aléatoire positive, donc d'après l'inégalité de Markov :

Démonstration

Soient n réels **positifs** $x_1, x_2, ..., x_n$ et X une variable aléatoire réelle **positive** ou nulle d'espérance μ et telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Théorème - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V.

$$\text{pout tout } \delta > 0, P\big(|X-\mu| \geqslant \delta\big) \leqslant \frac{V}{\delta^2}$$

Interprétation La probabilité que les valeurs prisent par X s'écarte de plus de δ de l'espérance $\mu = E(X)$ est d'autant plus petite que δ est grand.

Exemple

Le taux moyen de glycémie dans une population est de 1 grammes par litre, avec une variance de 0,1.
On choisit aux hasard une personne de cette population.
Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue son taux de glycémie.
Une personne présente un taux de glycémie critique si ce dernier ne se situe pas dans l'intervalle $]0,5;1,5[$. Cet événement ce traduit par l'inégalité $|X-E(X)| \geqslant 0,5$.

Démonstration

Soient X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V et δ un réel strictement positif.

II Loi des grands nombres

Théorème - Inégalité de concentration

Soit n variables aléatoires (avec $n \geqslant 1$) $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X. C'est à dire indépendantes et identiquement distribuées, suivant une même loi de probabilité d'espérance μ et de variance V.

On note $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne.

$$\text{pout tout } \delta > 0, P\big(|M_n - \mu| \geqslant \delta\big) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$$

En effet, $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \dfrac{V}{n}$

Exemple

Dans une société de démarchage par téléphone, on estime que 40% des personnes appelées répondent effectivement.

On appelle n personnes. Soit X_k la variable aléatoire qui associe 1 à toute issue dont la k^{ime} personne appelée répond et 0 sinon.

Démonstration

Soit n variables aléatoires (avec $n \geqslant 2$) $X_1, X_2, ..., X_n$ indépendantes et identiquement distribuées, suivant une même loi de probabilité d'espérance μ et de variance V, ($X_1, X_2, ..., X_n$ est un échantillon de taille n).

Propriété - Loi faible des grands nombres

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance V.

Soit $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ la variable aléatoire moyenne.

Pour tout réel $\delta > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} P\big(|M_n - \mu| \geqslant \delta\big) = 0$$

Démonstration