Calcul algébrique

Exercice 1

Développez et simplifiez les expressions suivantes :

1. $A = (3-2x)^2 + 5 \times (x-2)$
2. $B = 3 \times (x-1) - (2-5x)^2$
3. $C = 4x - 3 - 2(x+1)(4-3x)$

Exercice 2

Effectuer le calcul suivant et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

$$D = 2 + \frac{\frac{1}{3} - 5}{2}$$

Exercice 3

Résoudre l'équation suivante :

$$5(x-2) = 7(x+5) - 3(x+6)$$

Exercice 4

Résoudre dans l'ensemble des réels les inéquations suivantes :

1. $5x + 3 \geqslant 7$
2. $3x - 2 \leqslant 2x + 1$
3. $\dfrac{2x+4}{x-2} > 3$

Exercice 5

1. Factoriser au maximum les expressions suivantes.
   (a) $D = (x-4)^2 - (4x+1)(x-4)$
   (b) $E = 4x^2 + 9 + 12x$
   (c) $F = (x-2)^2 - (1-2x)^2$
2. Résoudre les équations :
   (a) $(5x-7) \times (-x-3) = 0$

(b) $(2x+7)^2 - (x-5)^2 = 0$

(c) $2x - 5(x+1) = x - 7$

Exercice 6

Résoudre les systèmes d'équations suivants en utilisant la méthode de substitution, puis en utilisant la méthode des combinaisons linéaires :

1. $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -5x + 7 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4a + 2b = 3 \\ 3a - 2b = 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 5a + 2b = 1 \\ 3a - 4b = 6 \end{cases}$

Exercice 7

Résoudre sur l'ensemble des réels les inéquations suivantes (Vous pourrez pour vous aider faire un tableau de signes) :

1. $(2x-1)(-5x+2) > 0$
2. $(4x-2)(x+4) \leqslant (4x-2)(1-2x)$
3. $(2x+1)^2 - (3x-2)^2 \geqslant 0$
4. $(3x-2)^2 \leqslant 4$
5. $(x-2)^2 > (2x-3)^2$

Exercice 8

1. Démontrer que $\left(1+3\sqrt{5}\right)^3 = 136 + 144\sqrt{5}$
2. En déduire alors la valeur de la racine cubique de $136 + 144\sqrt{5}$

Exercice 9

On s'intéresse aux variation de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

1. Démontrer que pour tout réels a et b, on a :

$$b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^3)$$

2. Soient a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b$.
   (a) Montrer que $b^3 - a^3 > 0$
   (b) En déduire les variations de la fonction cube sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Soient a et b deux réels tels que $a < b \leqslant 0$.
   (a) Montrer que $b^3 - a^3 > 0$
   (b) En déduire les variations de la fonction cube sur $[-\infty\ ;\ 0[$.
4. Soient a et b deux réels tels que $a < 0$ et $b > 0$.
   Comparer $a^{''}$ et b^3.

5. Conclure quant aux variations de la fonction cube sur $\mathbb{R}$

Exercice 10

Soient a, b et c trois réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Déterminer a, b et c tels la courbe représentative de f passe par les points $A(0;2)$, $B(1,0)$ et $C(2,1)$

Exercice 11

Soient a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{ax+3}{bx^2+1}$$

1. Quel doit être le signe de b pour que la fonction f soit bien définie sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.
2. Déterminer a, b tels la courbe représentative de f passe par les points $A(1;1)$ et $B(-1,3)$.
3. En déduire que :
$$f(x) = \frac{-9x+12}{-x^2+4}$$

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 2$$

1. Montrer que $f(x) = 2\left(\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right)$
2. En déduire que :
$$f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-2)$$
3. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x^2 - 2x - 3$$

1. Montrer que $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{13}{4}$
2. En déduire que :
$$f(x) = 4\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{4}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{4}\right)$$

3. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$