

Continuité, dérivabilité et convexité

I Continuité

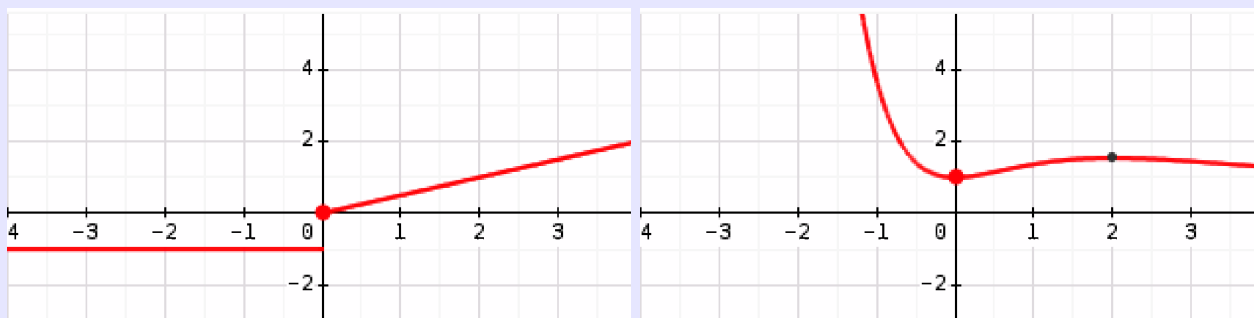
1 Définitions et propriétés



Définition

Soit L un réel et f une fonction définie sur un ensemble E et a un élément de E .

- On dit que la fonction f est continue en a si f a une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- On dit que la fonction f est continue sur E si f est continue en a pour tout élément a de E .



Propriétés

- Les fonctions de référence (polynômes, valeur absolue, exponentielle, racine carré, inverse ...) sont continue sur leur ensemble de définition.
- La somme, le produit et le quotient de fonctions continues est continue sur son ensemble de définition.



Propriété

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I convergeant $a \in I$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$$



Théorème du point fixe

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I dans lui même et (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si la suite (u_n) converge vers une limite $l \in I$, alors l est une solution de l'équation $f(x) = x$

Exemple

Soient f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f : x \mapsto 4 - \frac{1}{x}$$

et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que f est croissante sur $]0; +\infty[$
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leq u_{n+1} \leq 4$
3. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
4. En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2 Théorème des valeurs intermédiaires

♥ Théorème Théorème des valeurs intermédiaires

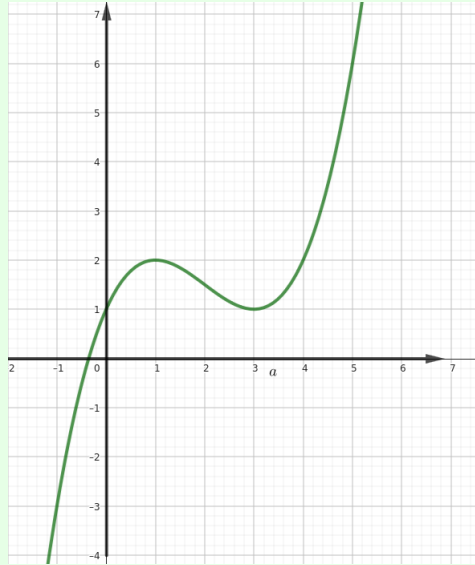
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$

Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$

Autrement dit, tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent dans $[a; b]$.

On écrit, en supposant que $f(a) \leq f(b)$:

$$\forall k \in [f(a); f(b)], \exists c \in [a; b] \text{ tel que } f(c) = k$$



💡 Exemple

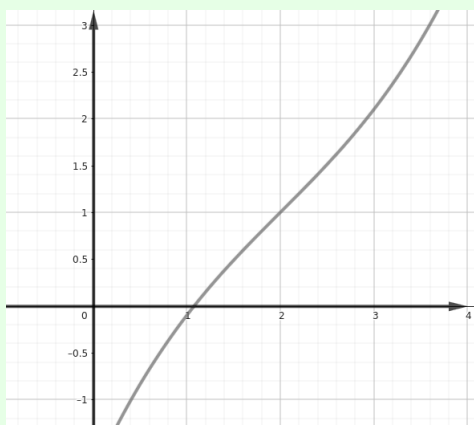
Soit f la fonction définie sur $R = \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

Démontrer que l'équation $f(x) = 5$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$

♥ Propriété : Corollaire du théorème des valeurs intermédiaire ou théorème de la bijection

Si f est une fonction continue et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur un intervalle $[a; b]$, alors tout réel $k \in [f(a); f(b)]$ (respectivement $k \in [f(b); f(a)]$) a un unique antécédent par f dans $[a; b]$.

C'est à dire que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a; b]$.



💡 Exemple

Démontrer que l'équation $e^x - x = 4$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$.

II Dérivabilité

1 Rappel

📖 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{I}$ et a un élément de $\mathcal{I}$. On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel L tel que $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers L lorsque h tend vers 0.

Dans ce cas, L est appelé nombre dérivé de f en a et on l'écrit $f'(a)$. d'où, si f est dérivable en a , on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

dans ce cas, on a aussi :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en a pour tout $a \in I$

2 propriétés



Propriété

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors f est continue sur cet intervalle.



Danger

La réciproque de cette propriété est fausse, en effet la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ bien qu'elle ne soit pas dérivable en 0.



Propriété Dérivée d'une fonction composée

Soient f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et à valeur dans un intervalle J et g une fonction définie et dérivable sur J .

Dans ce cas, la fonction h définie sur I par $h(x) = (g \circ f)(x)$ est dérivable sur I et on a pour tout réel x :

$$h'(x) = (g' \circ f)(x) \times f'(x)$$



Exemples

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2 - 2x + 1}$



Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I tel que sa dérivée f' est aussi dérivable sur I . On dit alors que f est deux fois dérivable sur I et on note f'' la dérivée de f' . f'' est appelée **dérivée seconde** de f .



Exemple

Calculer la dérivée seconde de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{(x-2)^4}$

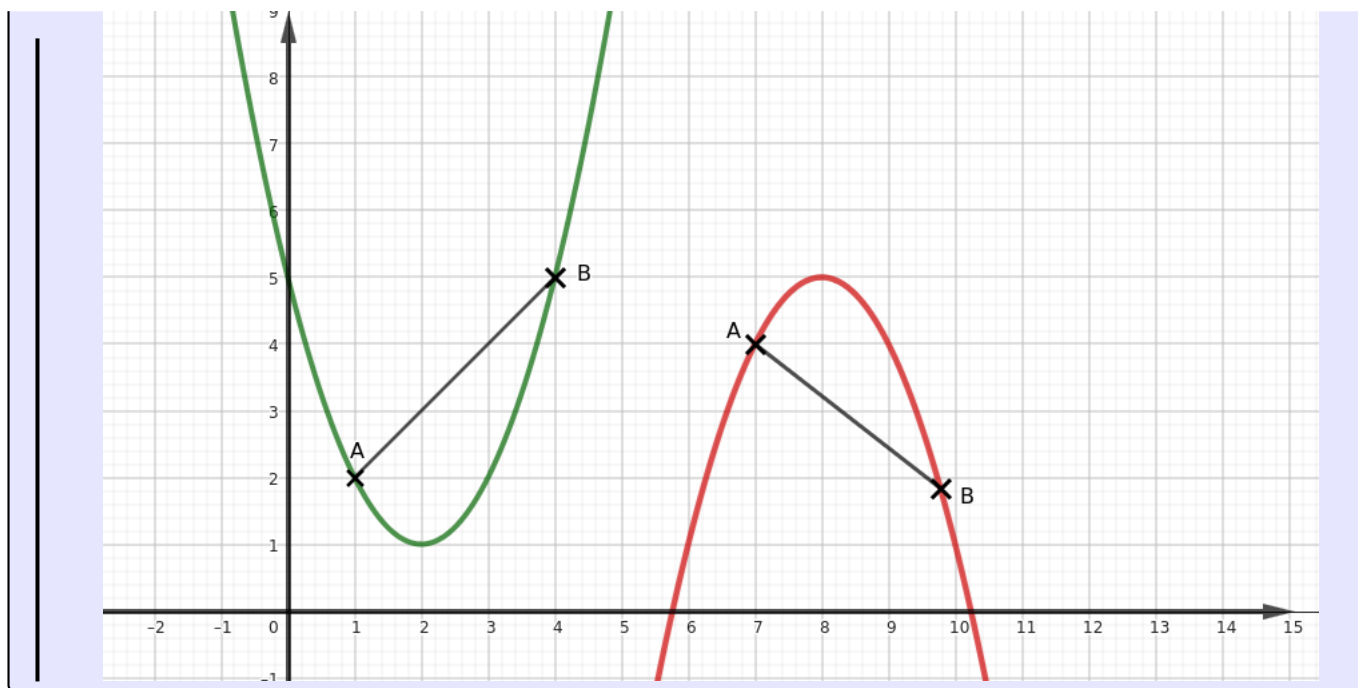
III Convexité



Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Soient A et B deux points d'abscisses respectives a et b .

- On dit que f est **convexe** si pour tout $(a, b) \in \mathcal{I}^2$, $\mathcal{C}$ est **en dessous** de la corde $[AB]$.
- On dit que f est **concave** si pour tout $(a, b) \in \mathcal{I}^2$, $\mathcal{C}$ est **au dessus** de la corde $[AB]$.



💡 Exemples

- Les fonctions carré et exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$
- La fonction inverse est convexe sur $] -\infty; 0[$ et elle est aussi convexe sur $]0; +\infty[$.

❤️ Propriétés

Soient f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I .

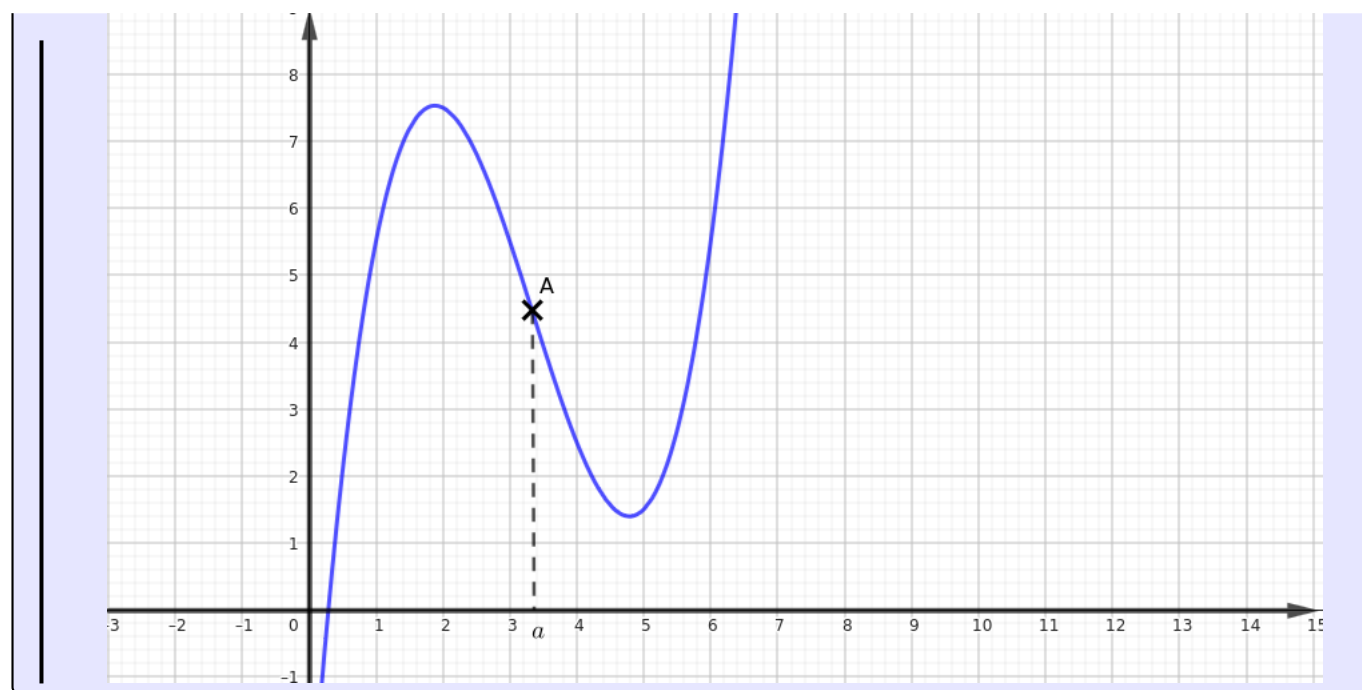
Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est une fonction convexe sur I .
- La courbe représentative de f est au dessus de ses tangente sur I
- La dérivée f' de f est croissante sur I .
- La dérivée seconde f'' de f est positive sur I .

📖 Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I , $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et A un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a .

On dit que A est un point d'inflexion si f change de convexité en a .



Remarque

Pour démontrer que le point A d'abscisse a est un point d'inflexion, on montre généralement que la dérivée seconde change de signe en a , ce qui implique aussi que la dérivée change de variation en a .

Exemple

Démontrer que la fonction cube admet un point d'inflexion en 0, c'est à dire que le point d'abscisse 0 de la courbe représentative de la fonction cube est un point d'inflexion.