

Continuité, dérivabilité et convexité

I Continuité

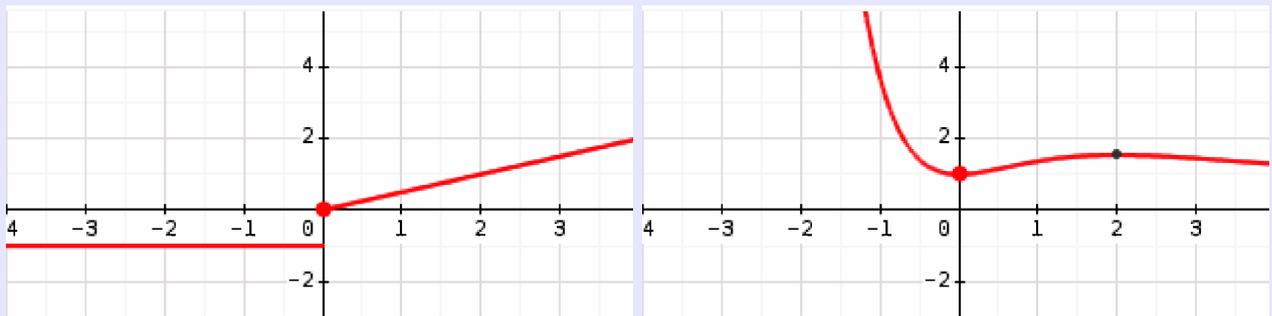
1 Définitions et propriétés



Définition

Soit L un réel et f une fonction définie sur un ensemble E et a un élément de E .

- On dit que la fonction f est continue en a si f a une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- On dit que la fonction f est continue sur E si f est continue en a pour tout élément a de E .



Propriétés

- Les fonctions de référence (polynômes, valeur absolue, exponentielle, racine carré, inverse ...) sont continue sur leur ensemble de définition.
- La somme, le produit et le quotient de fonctions continues est continue sur son ensemble de définition.



Propriété

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I convergeant $a \in I$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$$

Démonstration 1. On utilise les définitions de la limite de f en a et celle de la limite de (u_n) en $+\infty$.

soit $\epsilon > 0$

f étant continue sur I et a étant un élément de I , on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, c'est à dire qu'il existe $\alpha > 0$

tel que pour tout $x \in]a - \alpha; a + \alpha[$, $f(x) \in]f(a) - \epsilon; f(a) + \epsilon[$ D'autre part, $\lim_{n \rightarrow a} u_n = a$, donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$ on ait $u_n \in]a - \alpha; a + \alpha[\cap I$

Donc pour $n \geq N_0$, $f(u_n) \in]f(a) - \epsilon; f(a) + \epsilon[$ et par conséquent : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)}$

Théorème du point fixe

 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I dans lui-même et (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

 Si la suite (u_n) converge vers une limite $l \in I$, alors l est une solution de l'équation $f(x) = x$

Démonstration 2. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I dans lui-même et (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ telle que (u_n) converge vers une limite $l \in I$.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = f(l)$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$ et par conséquent $\boxed{l = f(l)}$

Exemples

- Soient f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$
 2. En déduire sa limite l .
 3. Montrer que $f(l) \neq l$ et justifier la raison pour laquelle le théorème du point fixe ne fonctionne pas.
- Soient f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f : x \mapsto 4 - \frac{1}{x}$$

et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que f est croissante sur $]0; +\infty[$

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leq u_{n+1} \leq 4$
3. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
4. En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2 Théorème des valeurs intermédiaires

♥ Théorème des valeurs intermédiaires

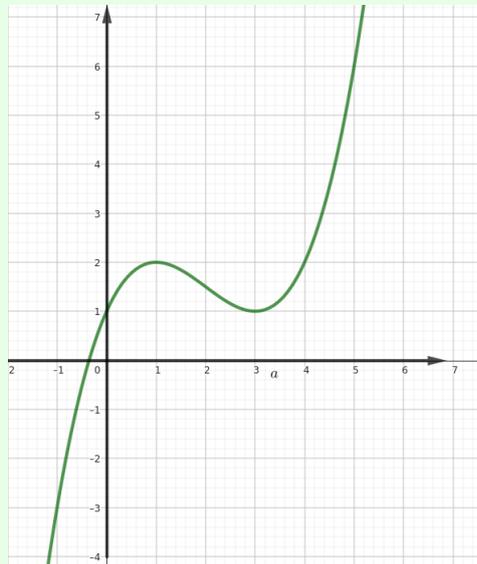
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$

Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$

Autrement dit, tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent dans $[a; b]$.

On écrit, en supposant que $f(a) \leq f(b)$:

$$\forall k \in [f(a); f(b)], \exists c \in [a; b] \text{ tel que } f(c) = k$$



💡 Exemple

Soit f la fonction définie sur $R = \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

Démontrer que l'équation $f(x) = 5$ admet au moins une solution dans \mathbb{R}

Démonstration 3. On démontre ce théorème dans le cas où f est une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ telle que $f(a) \leq f(b)$.

Soit $k \in [f(a); f(b)]$.

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies sur \mathbb{N} par $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = a_n \text{ si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq k \\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < k \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq k \\ b_{n+1} = b_n \text{ si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < k \end{array} \right.$$

On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.

○ **Initialisation**

On a deux cas :

* Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq k$, alors $a_1 = a_0 = a$ et $b_1 = \frac{a+b}{2}$

or $a \leq b$ donc $\frac{a+a}{2} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{b+b}{2}$ d'où $a_1 \leq b_1 \leq b$

par conséquent, on a bien $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$

* Sinon, on a $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < k$, d'où $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $b_1 = b_0 = b$.

or $a \leq b$ donc $\frac{a+a}{2} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{b+b}{2}$ d'où $a_0 \leq a_1 \leq b_1$

par conséquent, on a bien $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$

○ **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que la proposition soit vraie pour l'entier n . c'est à dire que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.

La encore on a deux cas :

* Si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq k$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$

or $a_n \leq b_n$ donc $\frac{a_n + a_n}{2} \leq \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2}$ d'où $a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$

par conséquent, on a bien $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$

* Sinon, on a $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < k$, d'où $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

or $a_n \leq b_n$ donc $\frac{a_n + a_n}{2} \leq \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2}$ d'où $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1}$

par conséquent, on a bien $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$

○ **Conclusion**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$

La suite (a_n) est donc croissante et majorée par b , et par conséquent elle converge vers un réel $l_a \in [a; b]$.

De même, la suite (b_n) est décroissante et minorée par a et par conséquent elle converge vers un réel $l_b \in [a; b]$.

Soit (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{b_n - a_n}{2}$

Démontrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = \frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{2}$$

La encore on a deux cas :

- Si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq k$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$
d'où $v_{n+1} = \frac{\frac{a_n + b_n}{2} - a_n}{2} = \frac{\frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2a_n}{2}}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{v_n}{2}$
- Sinon, on a $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < k$, d'où $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
d'où $v_{n+1} = \frac{b_n - \frac{a_n + b_n}{2}}{2} = \frac{\frac{2b_n}{2} - \frac{a_n + b_n}{2}}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{v_n}{2}$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{2}$ et par conséquent la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]0; 1[$, donc elle converge vers 0.

or (a_n) et (b_n) étant convergentes, on a :

$$\frac{l_b - l_a}{2} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n - a_n}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

Donc $\frac{l_b - l_a}{2} = 0$ et par conséquent $l_b = l_a$.

Notons l cette limite commune.

La fonction f étant continue sur l'intervalle $[a; b]$ et (a_n) étant une suite d'éléments de $[a; b]$ convergent vers l , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(l) \leq k \text{ par définition de } (a_n)$$

De même, la fonction f étant continue sur l'intervalle $[a; b]$ et (b_n) étant une suite d'éléments de $[a; b]$ convergent vers l , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(l) \geq k \text{ par définition de } (b_n)$$

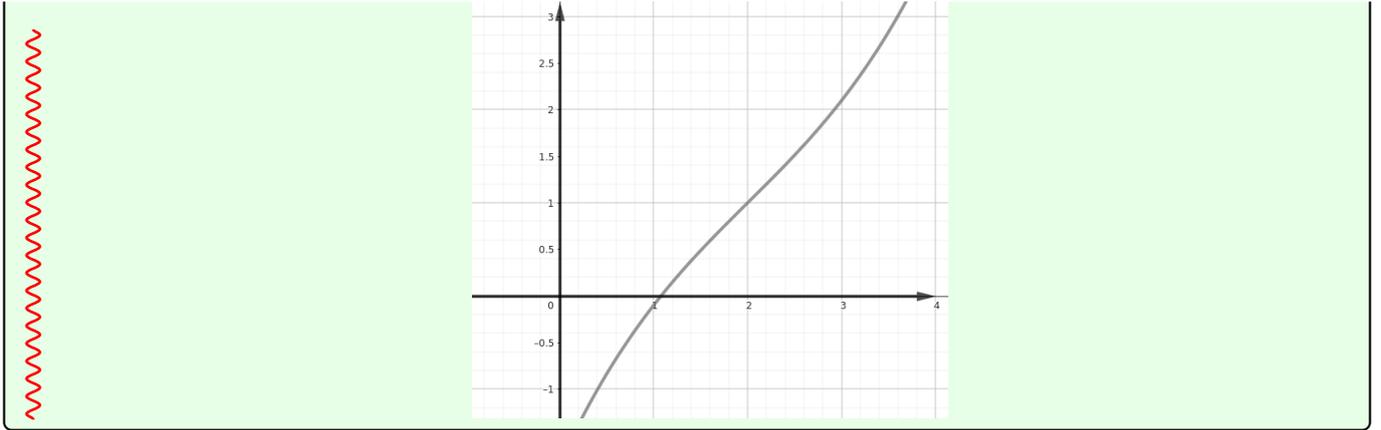
Donc $f(l) \leq k$ et $f(l) \geq k$ et par conséquent $\boxed{f(l) = k}$.

D'où la conclusion.

♥ Propriété : Corollaire du théorème des valeurs intermédiaire ou théorème de la bijection

Si f est une fonction continue et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur un intervalle $[a; b]$, alors tout réel $k \in [f(a); f(b)]$ (respectivement $k \in [f(b); f(a)]$) a un unique antécédent par f dans $[a; b]$.

C'est à dire que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a; b]$.



💡 Exemple

Démontrer que l'équation $e^x - x = 4$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$.

Démonstration 4. Soient f une fonction continue et strictement monotone sur $[a; b]$ et $k \in [f(a); f(b)]$ un réel.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, k a au moins un antécédent dans $[a; b]$.

Démontrons alors par l'absurde que cet antécédent est unique.

Supposons donc qu'il existe deux réels distincts c_1 et c_2 dans $[a; b]$ tels que $f(c_1) = k$ et $f(c_2) = k$.

Sans nuire au raisonnement, on peut supposer que $c_1 < c_2$.

f étant strictement monotone sur $[a; b]$, on a deux cas :

- Supposons que f est strictement croissante sur $[a; b]$.
Dans ce cas, on a $f(c_1) < f(c_2)$ et par conséquent $k < k$, ce qui est absurde.
- Supposons que f est strictement décroissante sur $[a; b]$.
Dans ce cas, on a $f(c_1) > f(c_2)$ et par conséquent $k > k$, ce qui est aussi absurde.

Donc il n'existe qu'un unique antécédent de k par f dans $[a; b]$

II Dérivabilité

1 Rappel

**Définition**

Soit f une fonction définie sur un intervalle \mathcal{I} et a un élément de \mathcal{I} . On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel L tel que $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers L lorsque h tend vers 0.

Dans ce cas, L est appelé nombre dérivé de f en a et on l'écrit $f'(a)$. d'où, si f est dérivable en a , on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

dans ce cas, on a aussi :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en a pour tout $a \in I$

2 propriétés**Propriété**

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors f est continue sur cet intervalle.

Démonstration 5. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un élément de I .

Soit $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$.

Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times h \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= l \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$ et par conséquent f est continue en a .

**Danger**

La réciproque de cette propriété est fautive, en effet la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x|$ est continue sur \mathbb{R} bien qu'elle ne soit pas dérivable en 0.

**Propriété Dérivée d'une fonction composée**

Soient f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et à valeur dans un intervalle J et g une fonction définie et dérivable sur J .

Dans ce cas, la fonction h définie sur I par $h(x) = (g \circ f)(x)$ est dérivable sur I et on a pour tout réel x :

$$h'(x) = (g' \circ f)(x) \times f'(x)$$

Démonstration 6. Soient f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et à valeur dans un intervalle J et g une fonction définie et dérivable sur J .

Soit $a \in I$.

Montrons que $h = g \circ f$ est dérivable en a .

Soit $x \in I \setminus \{a\}$

On a alors :

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{f(x) - f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- D'une part, en posant $t = f(x)$ et $b = f(a)$ on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ car f étant dérivable sur I , elle est continue sur I .

De plus, g est dérivable sur J et b est un élément de J , donc on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{f(x) - f(a)} = \lim_{t \rightarrow b} \frac{g(t) - g(b)}{t - b} = g'(b) = (g' \circ f)(a)$$

- D'autre part, f étant dérivable en a , on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Donc $\frac{h(x) - h(a)}{x - a}$ a une limite réelle en a et :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = (g' \circ f)(a) \times f'(a)$$

$h = g \circ f$ est dérivable sur I et on a $\boxed{h'(x) = (g' \circ f)(x) \times f'(x)}$

Exemples

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$
2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{x^2 - 2x + 1}$

**Définition**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I tel que sa dérivée f' est aussi dérivable sur I . On dit alors que f est deux fois dérivable sur I et on note f'' la dérivée de f' . f'' est appelée **dérivée seconde** de f .

**Exemple**

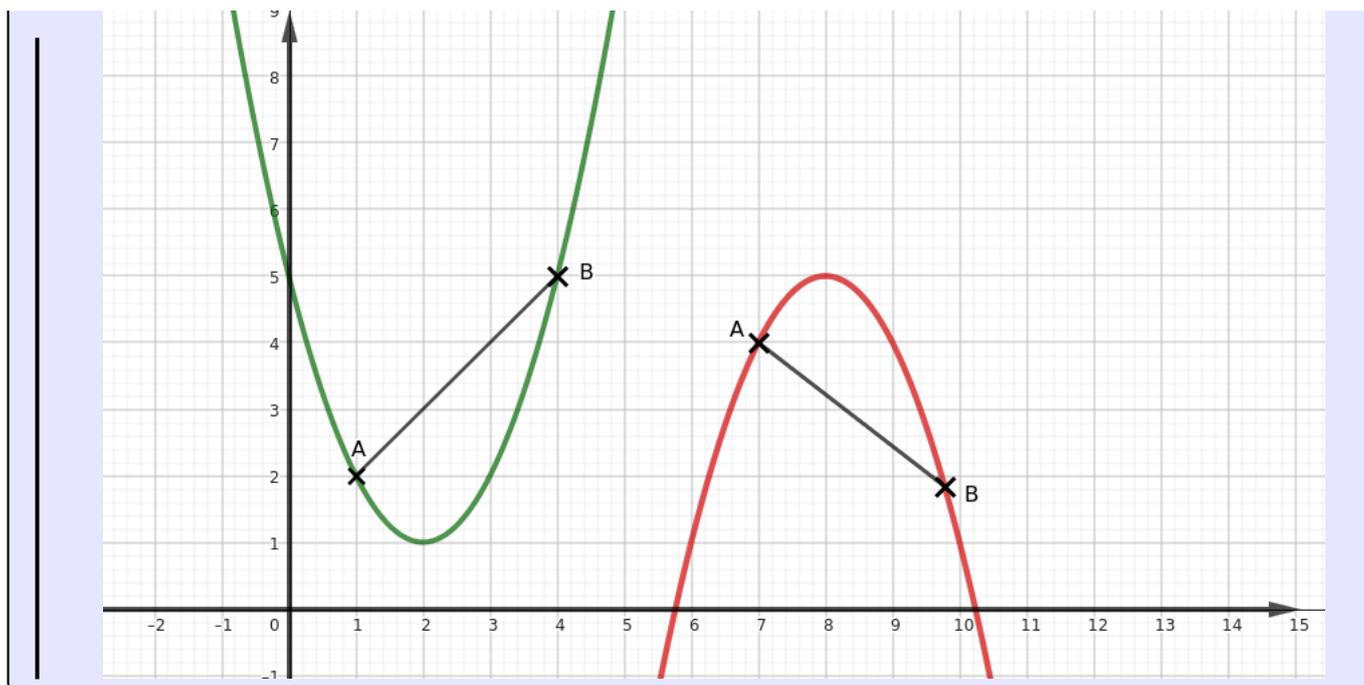
Calculer la dérivée seconde de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{(x-2)^4}$

III Convexité

**Définition**

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et \mathcal{C} sa courbe représentative. Soient A et B deux points d'abscisses respectives a et b .

- On dit que f est **convexe** si pour tout $(a, b) \in \mathcal{I}^2$, \mathcal{C} est **en dessous** de la corde $[AB]$.
- On dit que f est **concave** si pour tout $(a, b) \in \mathcal{I}^2$, \mathcal{C} est **au dessus** de la corde $[AB]$.



💡 Exemples

- Les fonctions carré et exponentielle sont convexes sur \mathbb{R}
- La fonction inverse est convexe sur $] -\infty; 0[$ et elle est aussi convexe sur $]0; +\infty[$.

♥ Propriétés

Soient f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I .

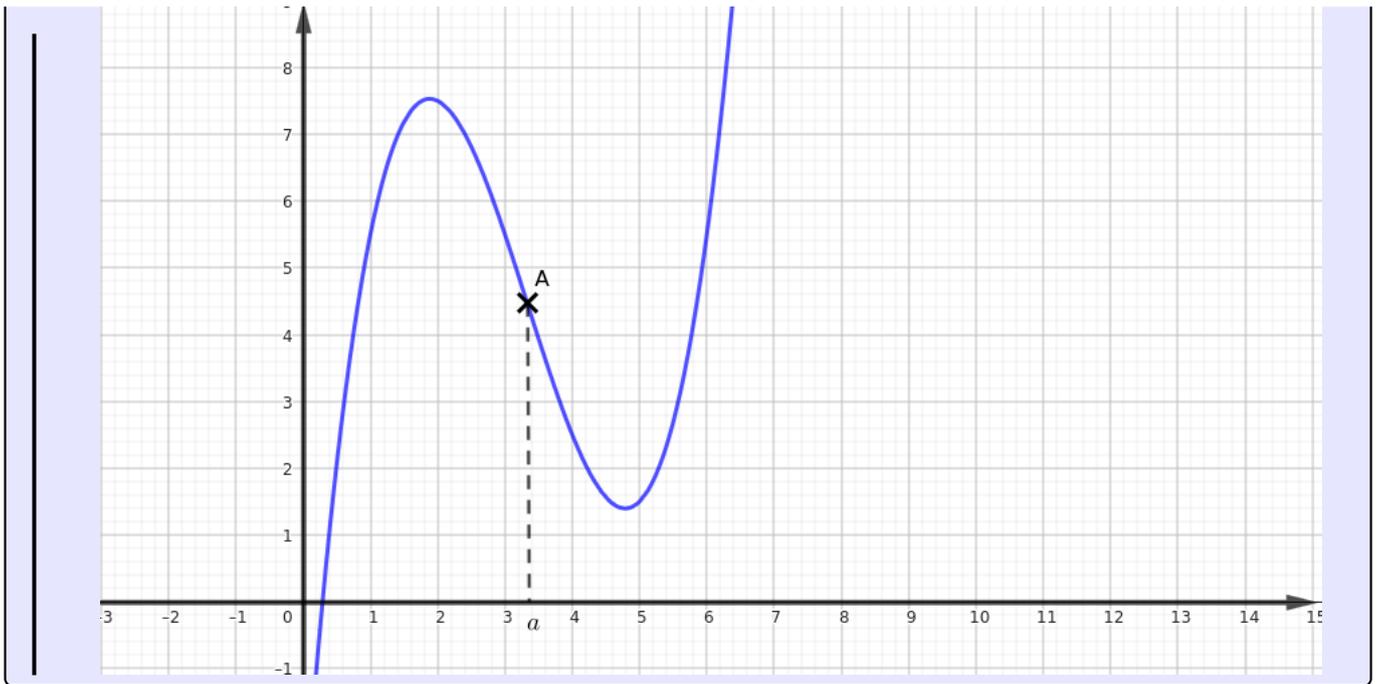
Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est une fonction convexe sur I .
- La courbe représentative de f est au dessus de ses tangente sur I
- La dérivée f' de f est croissante sur I .
- La dérivée seconde f'' de f est positive sur I .

📖 Définition

Soient f une fonction définie sur sur un intervalle I , \mathcal{C} sa courbe représentative et A un point de \mathcal{C} d'abscisse a .

On dit que A est un point d'inflexion si f change de convexité en a .



Remarque

Pour démontrer que le point A d'abscisse a est un point d'inflexion, on montre généralement que la dérivée seconde change de signe en a , ce qui implique aussi que la dérivée change de variation en a .

Exemple

Démontrer que la fonction cube admet un point d'inflexion en 0, c'est à dire que le point d'abscisse 0 de la courbe représentative de la fonction cube est un point d'inflexion.