Arithmétiques - PGCD, Théorème de Bézout et Théorème de Gauss

Exercice 1

Déterminer parmis les nombres suivants ceux qui sont premiers :

1. 1421
2. 1527
3. 1519
4. 1247
5. 2419
6. 5183
7. 5189
8. 6131

Exercice 2

Pour chacune des suites d'entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, préciser les termes qui sont premiers :

1. $u_n = n^3$
2. $u_n = n^2 - 4$
3. $u_n = n^2 + 8n + 16$

Exercice 3

On désigne par a et b deux entiers naturels supérieur ou égaux à 2.
Développer $(a^2 + 2b^2)^2$.
En déduire que l'entier ,naturel $a^4 + 4b^4$ n'est jamais un nombre premier.

Exercice 4

Effectuer la décomposition de 72 en produit de facteurs premiers.
En déduire les décompositions en produit de facteurs premiers des nombres :

1. 72^2
2. 6×72^3
3. 11×72^4
4. 7272

Exercice 5

Décomposer chacun des nombres suivant en produit de facteurs premiers.

1. 11858
2. 56056
3. 46189
4. 54285
5. 269568
6. 48608

Exercice 6

7 est le seul diviseur premier de l'entier naturel n qui admet au total 5 diviseurs positifs. Déterminer n

Exercice 7

Aucun carré d'entier différent de 1 ne divise l'entier naturel n.
Que peut-on en déduire pour la décomposition de n en produit de facteurs premiers ?

Exercice 8

m et n sont deux entiers naturels tels que $m^2 - n^2$ est un nombre premier.
Démontrer que m et n sont consécutifs.

Exercice 9

1. Le nombre $2^{11} - 1$ est-il premier ?
2. (a) Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, comment la somme S suivante peut-elle s'écrire ?
$$S = \sum_{k=0}^{q-1} 2^{kp}$$
   (b) En déduire que $2^{pq} \equiv 1 \quad [2^p - 1]$
   (c) Démontrer que $2^{pq} - 1$ est divisible par les deux nombres $2^p - 1$ et $2^q - 1$
   (d) En déduire que si le nombre $2^n - 1$ est premier, alors n est lui même premier.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Les nombres premiers de la forme $2^n - 1$ sont appelé nombres de Mersenne.

Exercice 10

Décomposer les entiers a et b suivants en produit de facteurs premiers et déterminer leur PGCD.

1. $a = 168$ et $b = 5346$
2. $a = 1750$ et $b = 2673$
3. $a = 125 \times 432$ et $b = 8000$

4. $a = 1,2 \times 10^6$ et $b = 864$
5. $a = 62073$ et $b = 225625$

Exercice 11

Soient a et b deux entiers naturels avec $a > b$
La division euclidienne de a par b s'écrit :

$$a = bq + r$$

1. Montrer que si d est un diviseur commun à a et à b, alors il divise r.
2. Recopier et compléter la phrase suivante :
   "L'ensemble des diviseurs communs à a et b est ....l'ensemble des diviseurs communs à b et r."
3. Montrer que si d' est un diviseur commun à b et r, alors il divise a.
4. Recopier et compléter la phrase suivante :
   "L'ensemble des diviseurs communs à b et r est ....l'ensemble des diviseurs communs à a et b."
5. Que peut-on en déduire pour $PGCD(a;b)$ et $PGCD(b,r)$?

Exercice 12

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. On pose :

$$x = 15a + 4b \qquad \text{et} \qquad y = 11a + 3b$$

1. Calculer $3x - 4y$ et $15y - 11x$
2. Montrer que $PGCD(a;b) = PGCD(x;y)$

Exercice 13

Appliquer l'algorithme d'Euclide aux entiers a et b pour déterminer leur $PGCD$. En déduire l'ensemble de leurs diviseurs communs.

1. $a = 3545$ et $b = 13$
2. $a = 1264$ et $b = 368$
3. $a = 3256$ et $b = 2354$
4. $a = 1225$ et $b = 325$
5. $a = 3250$ et $b = 660$

Exercice 14

Soit n un entier naturel non nul.
Déterminer le $PGCD$ de :

1. n et $n + 1$
2. $n + 1$ et $2n + 1$

3. n et $2n+1$
4. $4n+3$ et $3n+2$

Exercice 15

Déterminer les couples d'entiers naturel ayant pour PGCD 18 et pour somme 360.
Même question avec un PGCD de 18 et un produit de 6480.

Exercice 16

Le PGCD de deux nombres est 12.
Les quotients successifs obtenus dans le calcul de ce PGCD par l'algorithme d'Euclide sont 8, 2 et 7.
Trouver ces deux nombres.

Exercice 17

1. Soient a et b deux entiers relatifs non nuls et k un entier relatif tel que $a+kb>0$.
   Montrer que :
   $$PGCD(a;b) = PGCD(a+kb;b)$$
2. Déterminer par ce procédé le PGCD de 628 et 103.
3. n étant un entier naturel supérieur ou égale à 2, on pose :
   $$a = n^2 - 4n \qquad \text{et} \qquad b = 2n$$
   (a) Montrer que $PGCD(a,b) = n \times PGCD(n;2)$
   (b) Etudier suivant la parité de n la PGCD de a et b.

Exercice 18

Déterminer en fonction des valeurs de l'entier n,

1. $PGCD(n+1;2n+1)$
2. $PGCD(3n+4;2n+3)$
3. $PGCD(3n^2+5n+1;3n+1)$

Exercice 19

Démontrer que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2.
$n+1$ et (n^2+2n-2) sont premier entre eux.

Exercice 20

Calculer $324 \times 49 - 125 \times 127$. Donner quatre conséquences directes de cette égalité.

Exercice 21

Déterminer tous les entiers relatifs x et y tels que :

1. $12x = 7y$
2. $17x - 21y = 0$
3. $35x = 125y$
4. $48x - 64y = 0$

Exercice 22

Résoudre les équations diophantiennes suivantes :

1. $13x - 11y = 1$
2. $6x + 14y = 18$
3. $5x + 125y = 1$

Exercice 23

Petit théorème de fermat
Soit p un entier premier. Pour tout entier a non divisible par p,

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Soit k et k' deux entiers distincts tels que $1 \leq k \leq p-1$ et $1 \leq k' \leq p-1$.
On pose r_k et $r_{k'}$ les restes respectifs de la division euclidienne de ka et $k'a$ par p.
On a alors $ka \equiv r_k \pmod{p}$ et $k'a \equiv r_{k'} \pmod{p}$

1. Montrer que, pour tous k et k' définis comme précédemment, r_k et r'_k sont distincts et non nuls.

2. Il y a donc $(p-1)$ restes distinct non nuls : $\{r_1, r_2, ..., r_{p-1}\}$.
   Ces restes étant tous strictement inférieurs à p, alors une fois ordonné :

   $$\{r_1, r_2, ..., r_{p-1}\} = \{1, 2, ..., p-1\}$$

   En écrivant toute les congruences de ka modulo p, pour k variant entre 1 et $(p-1)$, prouver que :

   $$(p-1)!a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p}$$

3. En déduire le résultat énoncé.

Exercice 24

Application du petit théorème de Fermat

1. Soit n un entier premier supérieur strictement à 3. Montrer que $n^2 - 1$ est divisible par 24.
2. Montrer que $n^3 - n \equiv 0 \pmod{6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

3. Soit p un entier premier différent de 2. Montrer que

$$\left(\sum_{k=0}^{p-2} 2^k\right)$$

est divisible par p.

Exercice 25

1. Montrer que pour tout entier relatifs n, $14n+3$ et $5n+1$ sont premiers entre eux.
2. On considère l'équation **(E)** :

$$87x + 31y = 2 \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs}$$

Vérifier, en utilisant par exemple la question 1 que 87 et 31 sont premiers entre eux.
En déduire un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tels que $87u + 31v = 1$, puis une solution $(x_0; y_0)$ de **(E)**.

3. Soit (E') l'équation $87x + 31y = 0$ où x et y sont deux entiers relatifs.
   (a) Démontrer que $(x; y)$ est solution de **(E)** si et seulement si $(x - x_0; y - y_0)$ est solution de **(E')**
   (b) Résoudre **(E')**
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de **(E)**.