Terminale - DS du 17 septembre

2024-2025

Exercice 1

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 4\ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en -1.
2. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;\,6{,}5]$.
4. On considère h la fonction définie sur l'intervalle $[2\,;\,6{,}5]$ par $h(x) = f(x) - x$.
   On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction h :

x	2		$m \approx 2.364$		6.5
h	$h(2)$	$\nearrow$	$M \approx 2.265$	$\searrow$	$h(6.5)$

   Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2\ ;\ 6,5]$.
5. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel,

$$2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 6,5.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.
3. On rappelle que le réel α, défini dans la partie A, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2\,;\,6{,}5]$.
   Justifier que $\ell = \alpha$.