Continuité, dérivation et convexité

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} f : \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ \quad x & \mapsto x^4 + x^3 + x^2 + x - 1 \end{array} \right.$$

Démontrer que f admet une unique racine positive.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ \quad x & \mapsto 3 - \dfrac{x+1}{e^x} \end{array}$$

1. étude de f.
   (a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Quelles conséquences graphiques peut-on en déduire ?
   (b) Etudiez les variations de f et faire son tableau de variation.
2. Dans cette question, on pourra utiliser sans le justifier que pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > x$
   Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.
   Démontrer qu'il existe une unique solution à l'équation $f(x) = x$.
   On notera α cette solution.
3. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$$

   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$$

   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + (-4x^2 - 10x + 8)e^{-0,5x}$

1. Etudiez les variations de f.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-4; -2]$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x > 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \leqslant 2 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. f est-elle dérivable en 2.

Exercice 5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$:

1. Déterminer f',
2. Déterminer $f''(x)$.
3. On note $f^{(3)}$ la dérivée troisième de f, c'est à dire la dérivée de la dérivée seconde. Déterminer $f^{(3)}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 + \dfrac{3}{2}x - 10\right)^2$:

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer f',
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les abscisses des points de $\mathcal{C}$ où les tangentes sont horizontales.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$:
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$,
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
5. Que peut-on en déduire ?

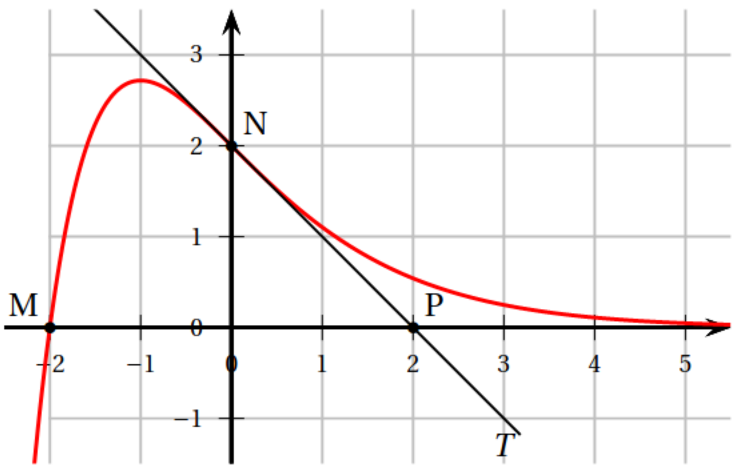
6. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 8

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.
Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en son point N(0 ; 2) ;
- le point M(−2 ; 0) appartenant à $\mathcal{C}_f$ et P(2 ; 0) appartenant à la tangente T.

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.



Partie A : étude graphique

1. (a) Donner $f(0)$.
   (b) Déterminer $f'(0)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a, b et λ sont des constantes réelles.

1. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variations complet de f.
5. Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 9

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

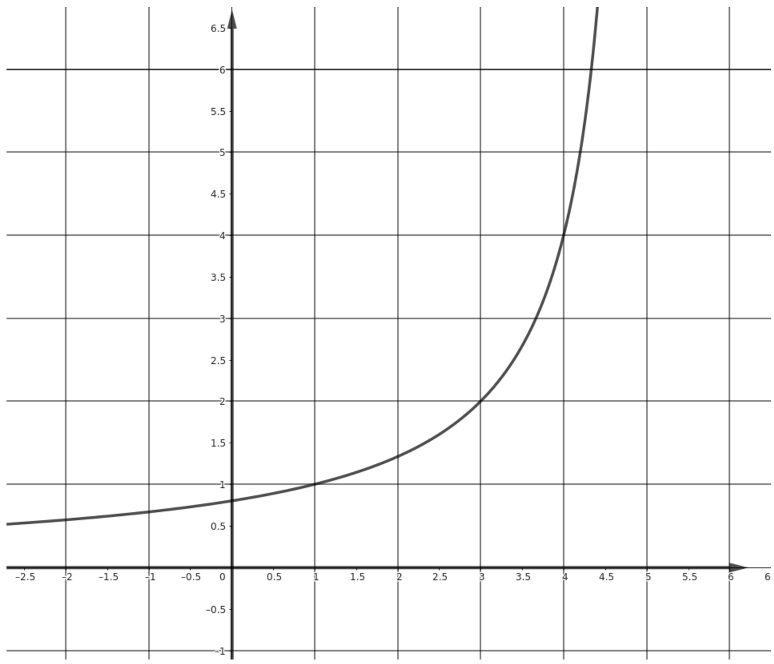
$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}.$$

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```python
def suite(n):
    u = ...
    for i in range(n) :
        u = ...
    return u
```

2. On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 5[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{5 - x}.$$



Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Tracer sur le graphique ci-dessus la droite d'équation $y = x$ et construire sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 et u_3.

(b) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 5[$.

(c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4.$$

(d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

(e) Déterminer sa limite l.

(f) Le comportement de la suite serait-il identique en choisissant comme terme initial $u_0 = 4$ au lieu de $u_0 = 3$?

Exercice 10

Partie A : Étude de la fonction

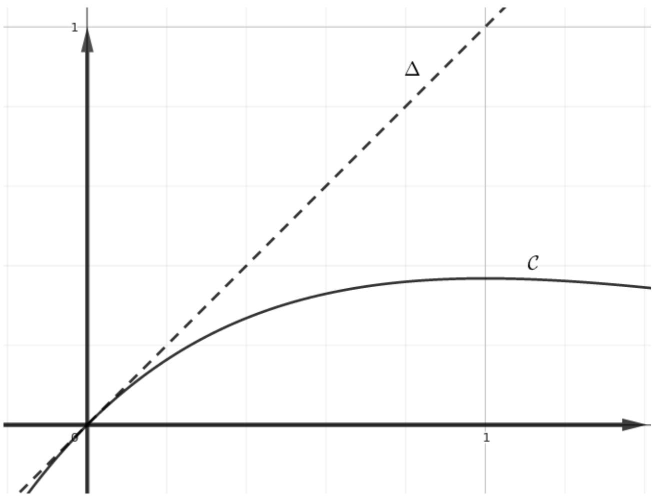
Soit f la fonction définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Déterminer les variations de f sur $[0; +\infty[$.

Partie B : Étude de suite

On donne ci-dessous, dans un repère du plan, la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f, et la droite Δ d'équation $y = x$.



Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Compléter le graphique en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ pour placer sur l'axe des abscisses les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. (*Laisser les traits de constructions au crayon de bois*)
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \geqslant u_n \geqslant u_{n+1} > 0$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. En déduire la limite l de la suite (u_n).

Partie C : Un programme et une somme

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

Recopier et compléter la fonction Python pour qu'elle renvoie la somme S_n

```
def Somme(n) :
    u = .....
    S = .....
    for k in range(.....) :
        u = ........
        S = ........
    return .........
```