Continuité, dérivabilité et convexité

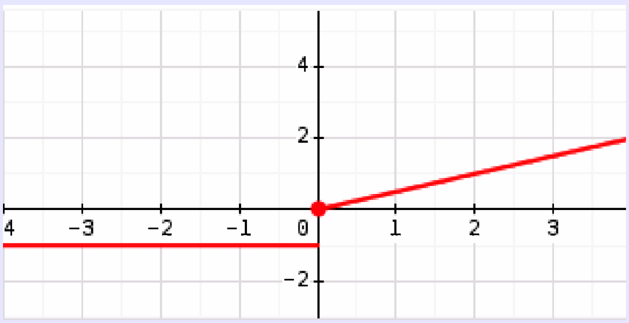
I Continuité

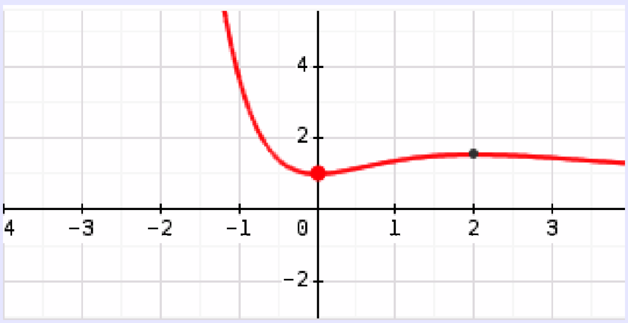
1 Définitions et propriétés

Définition

Soit L un réel et f une fonction définie sur un ensemble E et a un élément de E.

- On dit que la fonction f est continue en a si f a une limité en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que la fonction f est continue sur E si f est continue en a pour tout élément a de E.





Propriétés

- Les fonctions de référence (polynômes, valeur absolue, exponentielle, racine carré, inverse ...) sont continue sur leur ensemble de définition.
- La somme, le produit et le quotient de fonctions continues est continue sur son ensemble de définition.

Propriété

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I convergeant $a \in I$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$$

Théorème du point fixe

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I dans lui même et (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si la suite (u_n) converge vers une limite $l \in I$, alors l est une solution de l'équation $f(x) = x$

Exemple

Soient f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f : x \mapsto 4 - \frac{1}{x}$$

et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

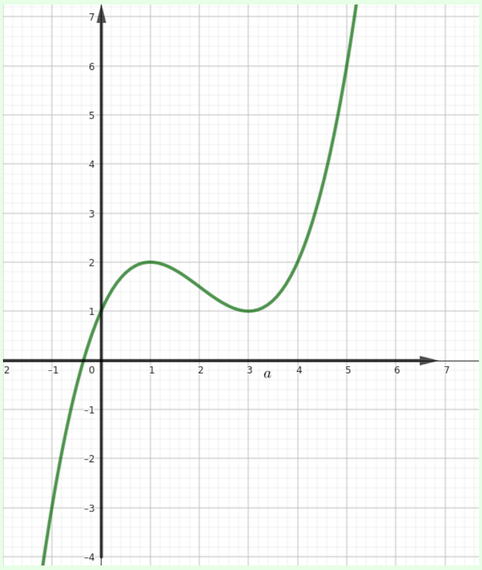
1. Montrer que f est croissante sur $]0;+\infty[$
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$
Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$
Autrement dit, tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent dans $[a;b]$.
On écrit, en supposant que $f(a) \leqslant f(b)$:

$$\forall k \in \left[f(a); f(b)\right], \exists c \in [a;b] \text{ tel que } f(c) = k$$



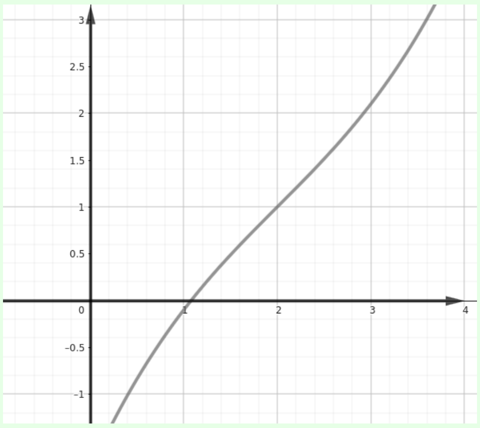
Exemple

Soit f la fonction définie sur $R = \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$
Démontrer que l'équation $f(x) = 5$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$

Propriété : Corollaire du théorème des valeurs intermédiaire ou théorème de la bijection

Si f est une fonction continue et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur un intervalle $[a;b]$, alors tout réel $k \in \left[f(a); f(b)\right]$ (respectivement $k \in \left[f(b); f(a)\right]$) a un unique antécédent par f dans $[a;b]$.

C'est à dire que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a; b]$.



Exemple

Démontrer que l'équation $\mathrm{e}^x - x = 4$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$.

II Dérivabilité

1 Rappel

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{I}$ et a un élément de $\mathcal{I}$. On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel L tel que $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers L lorsque h tend vers 0.

Dans ce cas, L est appelé nombre dérivé de f en a et on l'écrit $f'(a)$. d'où, si f est dérivable en a, on a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

dans ce cas, on a aussi :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en a pour tout $a \in I$

2 propriétés

Propriété

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est continue sur cet intervalle.

Danger

La réciproque de cette propriété est fausse, en effet la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ bien qu'elle ne soit pas dérivable en 0.

Propriété Dérivée d'une fonction composée

Soient f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et à valeur dans un intervalle J et g une fonction définie et dérivable sur J.
Dans ce cas, la fonction h définie sur I par $h(x) = (g \circ f)(x)$ est dérivable sur I et on a pour tout réel x :

$$h'(x) = (g' \circ f)(x) \times f'(x)$$

Exemples

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-2x+1}$

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I tel que sa dérivée f' est aussi dérivable sur I.
On dit alors que f est deux fois dérivable sur I et on note f'' la dérivée de f'.
f'' est appelée **dérivée seconde de** f.

Exemple

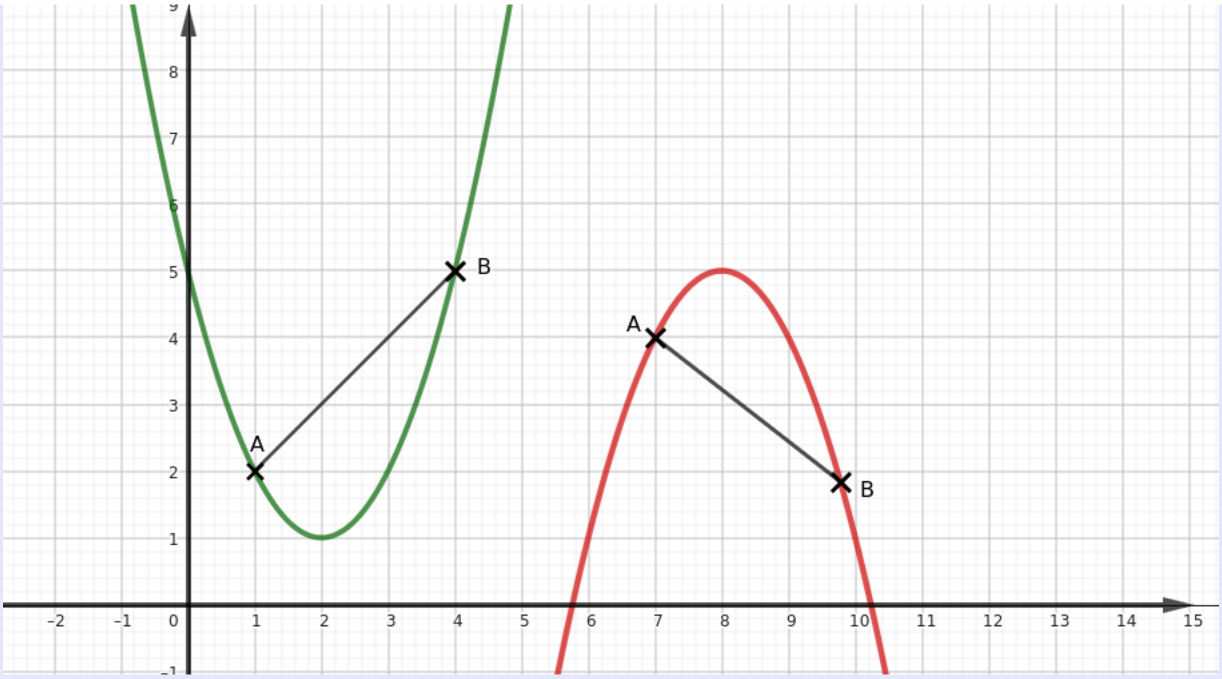
Calculer la dérivée seconde de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^4}$

III Convexité

Définition

Soient f une fonction définie sur sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
Soient A et B deux points d'abscisses respective a et b.

- On dit que f est **convexe** si pour tout $(a,b) \in \mathcal{I}^2$, $\mathcal{C}$ est **en dessous** de la corde $[AB]$.
- On dit que f est **concave** si pour tout $(a,b) \in \mathcal{I}^2$, $\mathcal{C}$ est **au dessus** de la corde $[AB]$.



Exemples

- Les fonctions carré et exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$
- La fonction inverse est convexe sur $]-\infty;0[$ et elle est aussi convexe sur $]0;+\infty[$.

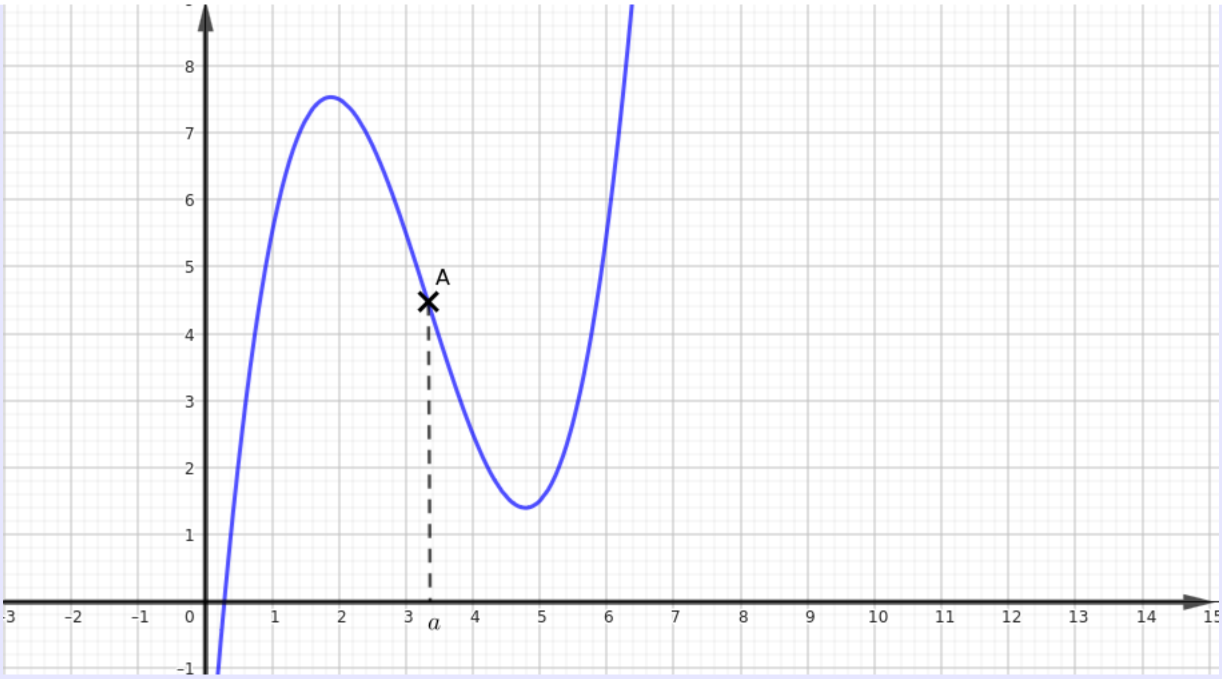
Propriétés

Soient f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est une fonction convexe sur I.
- La courbe représentative de f est au dessus de ses tangente sur I
- La dérivée f' de f est croissante sur I.
- La dérivée seconde f'' de f est positive sur I.

Définition

Soient f une fonction définie sur sur un intervalle I, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et A un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a.
On dit que A est un point d'inflexion si f change de convexité en a.



Remarque

Pour démontrer que kla point A d'abscisse a est un point d'inflexion, on montre généralement que la dérivée seconde change de signe en a, ce qui implique aussi que la dérivée change de variation en a.

Exemple

Démontrer que la fonction cube admet un point d'inflexion en 0, c'est à dire que le point d'abscisse 0 de la courbe représentative de la fonction cube est un point d'inflexion.