Continuité, dérivabilité et convexité

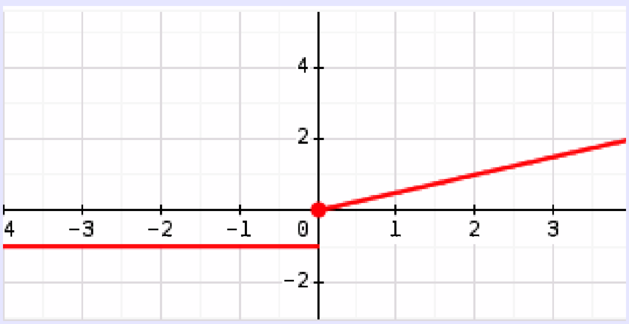
I Continuité

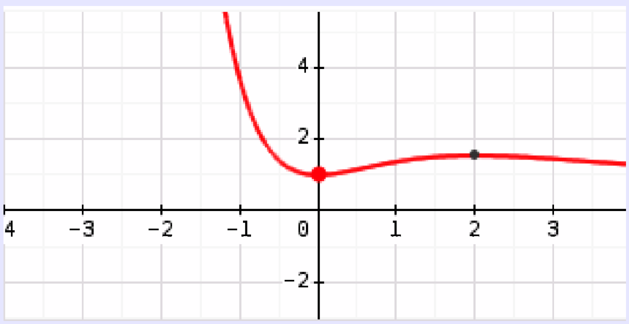
1 Définitions et propriétés

Définition

Soit L un réel et f une fonction définie sur un ensemble E et a un élément de E.

- On dit que la fonction f est continue en a si f a une limité en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que la fonction f est continue sur E si f est continue en a pour tout élément a de E.





Propriétés

- Les fonctions de référence (polynômes, valeur absolue, exponentielle, racine carré, inverse ...) sont continue sur leur ensemble de définition.
- La somme, le produit et le quotient de fonctions continues est continue sur son ensemble de définition.

Propriété

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I convergeant $a \in I$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$$

Démonstration 1. On utilise les définitions de la limite de f en a et celle de la limite de (u_n) en $+\infty$.
soit $\epsilon > 0$
f étant continue sur I et a étant un élément de I, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, c'est à dire qu'il existe $\alpha > 0$

tel que pour tout $x \in]a-\alpha; a+\alpha[$, $f(x) \in]f(a)-\epsilon; f(a)+\epsilon[$ D'autre part, $\lim\limits_{n\to a} u_n = a$, donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$ on ait $u_n \in]a-\alpha; a+\alpha[\cap I$
Donc pour $n \geqslant N_0$, $f(u_n) \in]f(a)-\epsilon; f(a)+\epsilon[$ et par conséquent : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)}$

Théorème du point fixe

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I dans lui même et (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite (u_n) converge vers une limite $l \in \ I$, alors l est une solution de l'équation $f(x) = x$

Démonstration 2. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I dans lui même et (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ telle que (u_n) converge vers une limite $l \in \ I$.
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$
d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(l)$ car $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ et par conséquent $\boxed{l = f(l)}$

Exemples

- Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$
3. En déduire sa limite l.
4. Montrer que $f(l) \neq l$ et justifier la raison pour laquelle le théorème du point fixe ne fonctionne pas.

- Soient f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f : x \mapsto 4 - \frac{1}{x}$$

et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que f est croissante sur $]0; +\infty[$

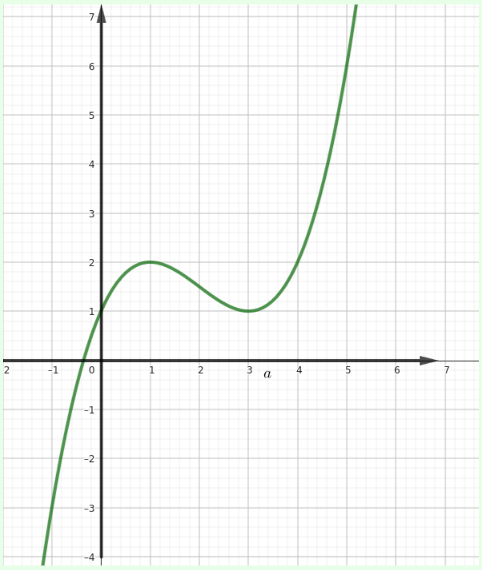
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$
Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$
Autrement dit, tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent dans $[a;b]$.
On écrit, en supposant que $f(a) \leqslant f(b)$:

$$\forall k \in \big[f(a); f(b)\big], \exists c \in [a;b] \text{ tel que } f(c) = k$$



Exemple

Soit f la fonction définie sur $R = \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$
Démontrer que l'équation $f(x) = 5$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$

Démonstration 3. On démontre ce théorème dans le cas où f est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ telle que $f(a) \leqslant f(b)$.
Soit $k \in [f(a); f(b)]$.

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = a_n \quad \text{si } f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geqslant k \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \quad \text{si } f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < k \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \quad \text{si } f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geqslant k \\ b_{n+1} = b_n \quad \text{si } f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < k \end{array} \right.$$

On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$.

- **Initialisation**
  On a deux cas :
  - Si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant k$, alors $a_1 = a_0 = a$ et $b_1 = \dfrac{a+b}{2}$
    or $a \leqslant b$ donc $\dfrac{a+a}{2} \leqslant \dfrac{a+b}{2} \leqslant \dfrac{b+b}{2}$ d'où $a_1 \leqslant b_1 \leqslant b$
    par conséquent, on a bien $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$
  - Sinon, on a $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < k$, d'où $a_1 = \dfrac{a+b}{2}$ et $b_1 = b_0 = b$.
    or $a \leqslant b$ donc $\dfrac{a+a}{2} \leqslant \dfrac{a+b}{2} \leqslant \dfrac{b+b}{2}$ d'où $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1$
    par conséquent, on a bien $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$
- **Hérédité**
  Soit $n \in \mathbb{N}$
  Supposons que la proposition soit vraie pour l'entier n. c'est à dire que $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$.
  La encore on a deux cas :
  - Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$
    or $a_n \leqslant b_n$ donc $\dfrac{a_n+a_n}{2} \leqslant \dfrac{a_n+b_n}{2} \leqslant \dfrac{b_n+b_n}{2}$ d'où $a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$
    par conséquent, on a bien $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$
  - Sinon, on a $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k$, d'où $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
    or $a_n \leqslant b_n$ donc $\dfrac{a_n+a_n}{2} \leqslant \dfrac{a_n+b_n}{2} \leqslant \dfrac{b_n+b_n}{2}$ d'où $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$
    par conséquent, on a bien $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$
- **Conclusion**
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$

La suite (a_n) est donc croissante et majorée par b, et par conséquent elle converge vers un réel $l_a \in [a;b]$.
De même, la suite (b_n) est décroissante et minorée par a et par conséquent elle converge vers un réel $l_b \in [a;b]$.

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{b_n - a_n}{2}$
Démontrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$
$v_{n+1} = \dfrac{b_{n+1} - a_{n+1}}{2}$

La encore on a deux cas :

- Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$, alors $a_{n+1}=a_n$ et $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$

  d'où $v_{n+1}=\dfrac{\dfrac{a_n+b_n}{2}-a_n}{2}=\dfrac{\dfrac{a_n+b_n}{2}-\dfrac{2a_n}{2}}{2}=\dfrac{\dfrac{b_n-a_n}{2}}{2}=\dfrac{v_n}{2}$
- Sinon, on a $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k$, d'où $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1}=b_n$.

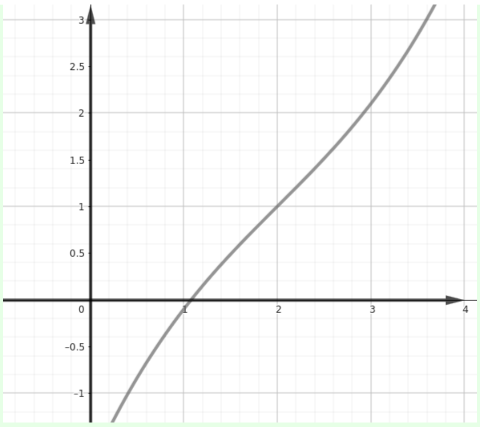
  d'où $v_{n+1}=\dfrac{b_n-\dfrac{a_n+b_n}{2}}{2}=\dfrac{\dfrac{2b_n}{2}-\dfrac{a_n+b_n}{2}}{2}=\dfrac{\dfrac{b_n-a_n}{2}}{2}=\dfrac{v_n}{2}$

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=\dfrac{v_n}{2}$ et par conséquent la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}\in]0;1[$, donc elle converge vers 0.
or (a_n) et (b_n) étant convergentes, on a :
$\dfrac{l_b-l_a}{2}=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n-\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_n-a_n}{2}=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$
Donc $\dfrac{l_b-l_a}{2}=0$ et par conséquent $l_b=l_a$.
Notons l cette limite commune.

La fonction f étant continue sur l'intervalle $[a;b]$ et (a_n) étant une suite d'éléments de $[a;b]$ convergent vers l, on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=f(l)\leqslant k$ par définition de (a_n)
De même, la fonction f étant continue sur l'intervalle $[a;b]$ et (b_n) étant une suite d'éléments de $[a;b]$ convergent vers l, on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=f(l)\geqslant k$ par définition de (b_n)
Donc $f(l)\leqslant k$ et $f(l)\geqslant k$ et par conséquent $\boxed{f(l)=k}$.
D'où la conclusion.

Propriété : Corollaire du théorème des valeurs intermédiaire ou théorème de la bijection

Si f est une fonction continue et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur un intervalle $[a;b]$, alors tout réel $k\in\big[f(a);f(b)\big]$ (respectivement $k\in\big[f(b);f(a)\big]$) a un unique antécédent par f dans $[a;b]$.
C'est à dire que l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans $[a;b]$.



Exemple

Démontrer que l'équation $e^x - x = 4$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$.

Démonstration 4. Soient f une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$ et $k \in [f(a); f(b)]$ un réel.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, k a au moins un antécédent dans $[a;b]$.
Démontrons alors par l'absurde que cet antécédent est unique.
Supposons donc qu'il existe deux réels distincts c_1 et c_2 dans $[a;b]$ tels que $f(c_1) = k$ et $f(c_2) = k$.
Sans nuire au raisonnement, on peut supposer que $c_1 < c_2$.
f étant strictement monotone sur $[a;b]$, on a deux cas :

- Supposons que f est strictement croissante sur $[a;b]$.
  Dans ce cas, on a $f(c_1) < f(c_2)$ et par conséquent $k < k$, ce qui est absurde.
- Supposons que f est strictement décroissante sur $[a;b]$.
  Dans ce cas, on a $f(c_1) > f(c_2)$ et par conséquent $k > k$, ce qui est aussi absurde.

Donc il n'existe qu'un unique antécédent de k par f dans $[a;b]$

II Dérivabilité

1 Rappel

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{I}$ et a un élément de $\mathcal{I}$. On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel L tel que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers L lorsque h tend vers 0.
Dans ce cas, L est appelé nombre dérivé de f en a et on l'écrit $f'(a)$. d'où, si f est dérivable en a, on a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

dans ce cas, on a aussi :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en a pour tout $a\in I$

2 propriétés

Propriété

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est continue sur cet intervalle.

Démonstration 5. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un élément de I.
Soit $l\in\mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=l$.
Donc :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}(f(a+h)-f(a)) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times h\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times\lim_{h\to 0}h\\ &= l\times 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$ et par conséquent $\boxed{f \text{ est continue en } a}$.

Danger

La réciproque de cette propriété est fausse, en effet la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ bien qu'elle ne soit pas dérivable en 0.

Propriété Dérivée d'une fonction composée

Soient f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et à valeur dans un intervalle J et g une fonction définie et dérivable sur J.
Dans ce cas, la fonction h définie sur I par $h(x)=(g\circ f)(x)$ est dérivable sur I et on a pour tout réel x :

$$h'(x)=(g'\circ f)(x)\times f'(x)$$

Démonstration 6. Soient f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et à valeur dans un intervalle J et g une fonction définie et dérivable sur J.
Soit $a \in I$.
Montrons que $h = g \circ f$ est dérivable en a.
Soit $x \in I \setminus \{a\}$
On a alors :

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{f(x) - f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- D'une part, en posant $t = f(x)$ et $b = f(a)$ on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ car f étant dérivable sur I, elle est continue sur I.
  De plus, g est dérivable sur J et b est un élément de J, donc on a :

$$\lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{f(x) - f(a)} = \lim_{t \to b} \frac{g(t) - g(b)}{t - b} = g'(b) = (g' \circ f)(a)$$

- D'autre part, f étant dérivable en a, on a :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Donc $\dfrac{h(x) - h(a)}{x - a}$ a une limite réelle en a et :

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = (g' \circ f)(a) \times f'(a)$$

$h = g \circ f$ est dérivable sur I et on a $\boxed{h'(x) = (g' \circ f)(x) \times f'(x)}$

Exemples

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2 - 2x + 1}$

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I tel que sa dérivée f' est aussi dérivable sur I.
On dit alors que f est deux fois dérivable sur I et on note f'' la dérivée de f'.
f'' est appelée **dérivée seconde de** f.

Exemple

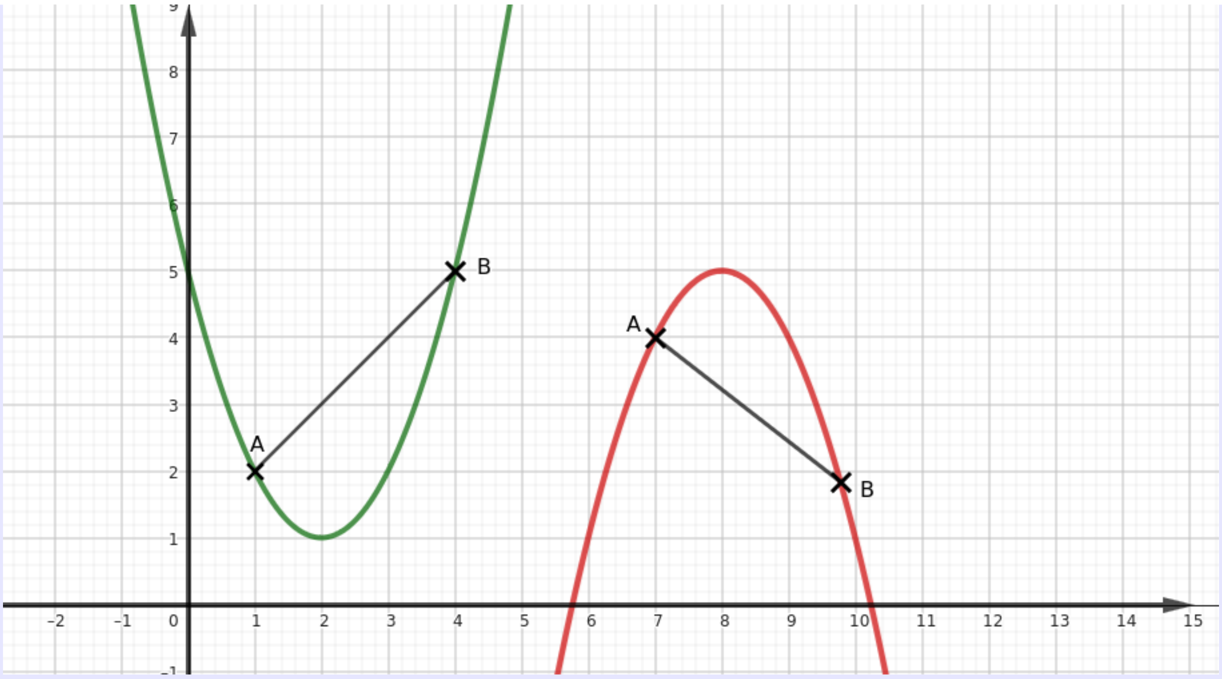
Calculer la dérivée seconde de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^4}$

III Convexité

Définition

Soient f une fonction définie sur sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
Soient A et B deux points d'abscisses respective a et b.

- On dit que f est **convexe** si pour tout $(a, b) \in \mathcal{I}^2$, $\mathcal{C}$ est **en dessous** de la corde $[AB]$.
- On dit que f est **concave** si pour tout $(a, b) \in \mathcal{I}^2$, $\mathcal{C}$ est **au dessus** de la corde $[AB]$.



Exemples

- Les fonctions carré et exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$
- La fonction inverse est convexe sur $]-\infty;0[$ et elle est aussi convexe sur $]0;+\infty[$.

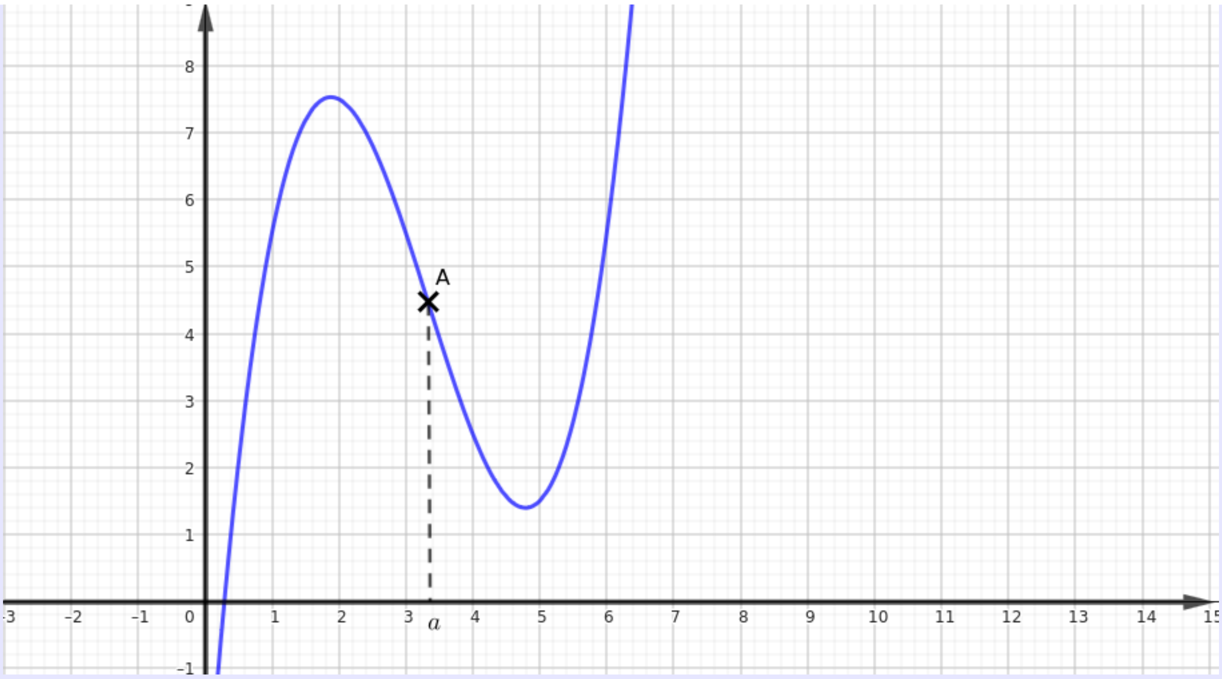
Propriétés

Soient f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est une fonction convexe sur I.
- La courbe représentative de f est au dessus de ses tangente sur I
- La dérivée f' de f est croissante sur I.
- La dérivée seconde f'' de f est positive sur I.

Définition

Soient f une fonction définie sur sur un intervalle I, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et A un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a.
On dit que A est un point d'inflexion si f change de convexité en a.



Remarque

Pour démontrer que kla point A d'abscisse a est un point d'inflexion, on montre généralement que la dérivée seconde change de signe en a, ce qui implique aussi que la dérivée change de variation en a.

Exemple

Démontrer que la fonction cube admet un point d'inflexion en 0, c'est à dire que le point d'abscisse 0 de la courbe représentative de la fonction cube est un point d'inflexion.