

Fonction logarithme

I Fonction logarithme

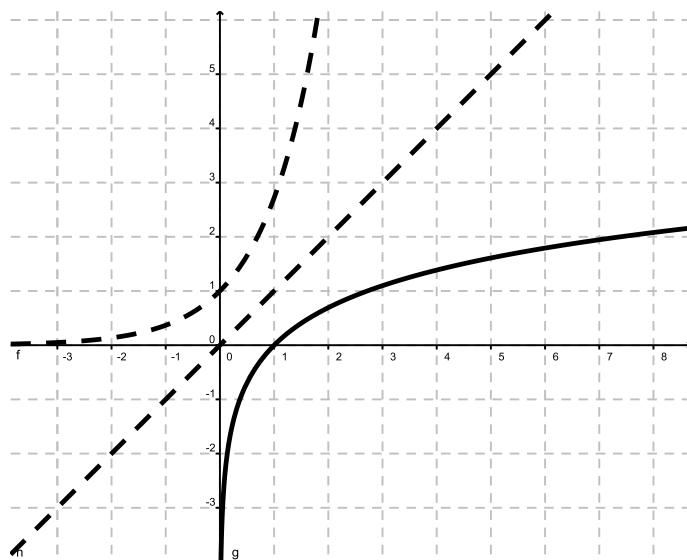
Remarque

On sait que la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* . En utilisant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on montre que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une unique valeur b tel que $a = e^b$. On écrit $b = \ln(a)$. Cette valeur est appelé logarithme népérien de a .

Définition

La fonction logarithme népérien, noté \ln , est définie sur \mathbb{R}_+^* .

Elle associe à tout nombre réel x strictement positif le nombre y tel que $x = e^y$, dont l'image par la fonction exponentielle est x . On écrit $y = \ln(x)$



Remarque

les courbes représentatives de la fonction exponentielle et de la fonction \ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Remarque

1. $e^0 = 1$, donc $\ln(1) = 0$
2. $e^1 = e$, donc $\ln(e) = 1$

Propriétés

- L'ensemble de définition de la fonction \ln est $]0, +\infty[$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y = \ln(x) \iff x = e^y$.

Démonstration



1 Propriétés algébriques

Propriété

 Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Exemple



Démonstration

Propriétés

On déduit de la propriété qui précède :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $\ln(x^n) = n \ln(x)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

Démonstration

II Etude de la fonction ln

On admet que la fonction ln est continue et dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Propriété

La dérivée de la fonction ln est la fonction inverse.

C'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Démonstration

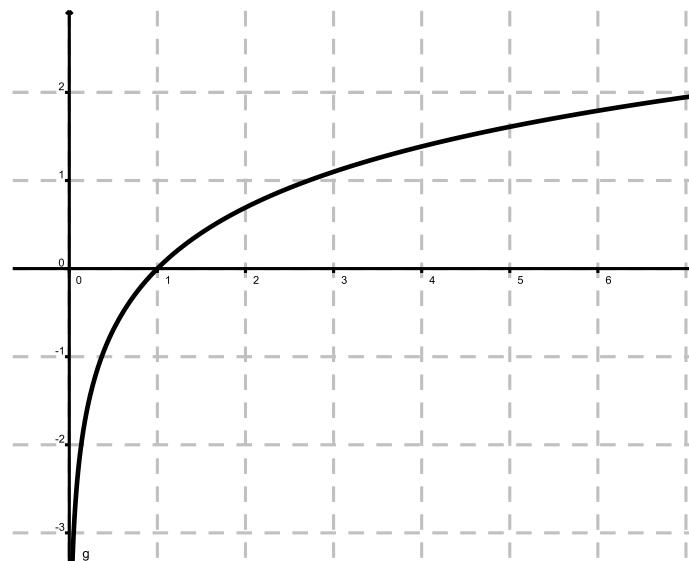


Propriété

La fonction logarithme népérien est strictement croissante de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} avec :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$



 **Démonstration**

III Croissances comparées et dérivée de fonction composée

 **Propriétés**

- 
1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
 2. $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln(x)) = 0$
 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

 **Démonstration**
 **Propriété**

Soit u une fonction définie, continue et dérivable sur l'intervalle I et à valeurs dans \mathbb{R}_+^* . La fonction $f : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I à pour dérivée la fonction f' définie par :



$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

 **Exemple** **Démonstration**

IV Logarithme décimal

 **Définition**

La fonction **logarithme décimal**, noté \log , est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

