Fonction logarithme

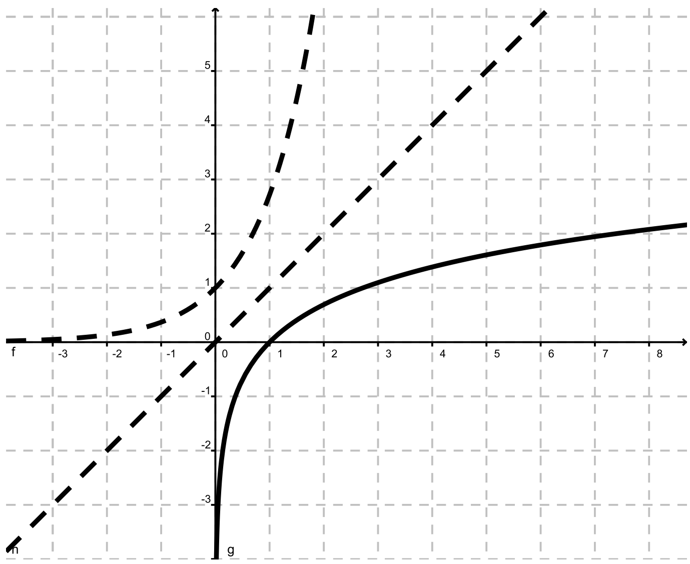
I Fonction logarithme

Remarque

On sait que la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on montre que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une unique valeur b tel que $a = e^b$. On écrit $b = \ln(a)$. Cette valeur est appelé logarithme népérien de a.

Définition

La fonction logarithme népérien, noté ln, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Elle associe à tout nombre réel x strictement positif le nombre y tel que $x = \mathrm{e}^y$, dont l'image par la fonction exponentielle est x. On écrit $y = \ln(x)$



Remarque

les courbes représentatives de la fonction exponentielle et de la fonction ln sont symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Remarque

1. $\mathrm{e}^0 = 1$, donc $\ln(1) = 0$
2. $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$, donc $\ln(e) = 1$

Propriétés

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0, +\infty[$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y = \ln(x) \iff x = e^y$.

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $y = \mathrm{e}^x$.
On a donc, par définition de la fonction logarithme népérien, $x = \ln y$ et par conséquent :

- $\ln(\mathrm{e}^x) = \ln y = x$
- $\mathrm{e}^{\ln y} = \mathrm{e}^x = y$
- * Si $y = \ln x$, alors $\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{\ln x}$ et par conséquent $\mathrm{e}^y = x$.
  * Réciproquement
    Si $\mathrm{e}^y = x$, alors $\ln(\mathrm{e}^y) = \ln x$ et par conséquent $y = \ln x$.

1 Propriétés algébriques

Propriété

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Exemple

Démonstration

Soient a et b deux réels strictement positifs.
Soient x et y deux réels tels que $x = \ln a$ et $y = lnb$
On a donc $a = \mathrm{e}^x$ et $b = \mathrm{e}^y$, d'où :

$$\begin{aligned}\ln(ab) &= \ln(\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y)\\ &= \ln(\mathrm{e}^{x+y})\\ &= x + y\end{aligned}$$

$$= \ln a + \ln b$$

Propriétés

On déduit de la propriété qui précède :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

Démonstration

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$, ce démontre par récurrence.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

  On a donc $\ln\left(\frac{1}{x} \times x\right) = \ln(1)$,

  d'où $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) = 0$,

  par conséquent $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right)\\ &= \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right)\\ &= \ln(x) - \ln(y)\end{aligned}$$

II Etude de la fonction ln

On admet que la fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété

La dérivée de la fonction ln est la fonction inverse.

C'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Démonstration

Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{lnx} \end{aligned}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonctions dérivables et on a :

- d(une part, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x$ et par conséquent $f'(x) = 1$.
- D'autre part, d'après la formules de la dérivée d'une fonction composée,

$f'(x) = \mathrm{e}^{\ln x} \times \ln'(x)$
d'où $f'(x) = x \times \ln'(x)$

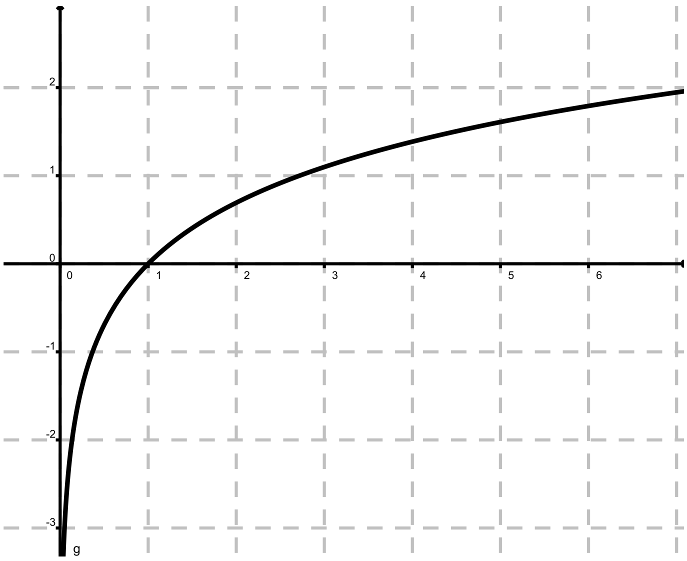
- par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
  $1 = x \times \ln'(x)$
  Donc $\boxed{\dfrac{1}{x} = \ln'(x)}$.

Propriété

La fonction logarithme népérien est strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$



Démonstration

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln' x = \dfrac{1}{x}$ et par conséquent $\ln'(x) > 0$, donc la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
- Démontrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ en utilisant la définition d'une limite infinie en $+\infty$.
  Soit $A \in \mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x > \mathrm{e}^A$.
  On a donc $\ln x > \ln\left(\mathrm{e}^A\right)$ Car la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
  d'où $\ln x > A$.
  Donc il existe $x_0 = \mathrm{e}^A$ tel que pour tout $x > x_0$, on a $\ln x > A$.
  Donc
  $$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\ln x) = -\infty$
  Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = -\infty$.

D'où $\lim\limits_{y\to 0}(\ln y) = -\infty$, avec $y = \dfrac{1}{x}$

III Croissances comparées et dérivée de fonction composée

Propriétés

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln(x)) = 0$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Démonstration

Propriété

Soit u une fonction définie, continue et dérivable sur in intervalle I et a valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $f : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I a pour dérivée la fonction f' définie par :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple

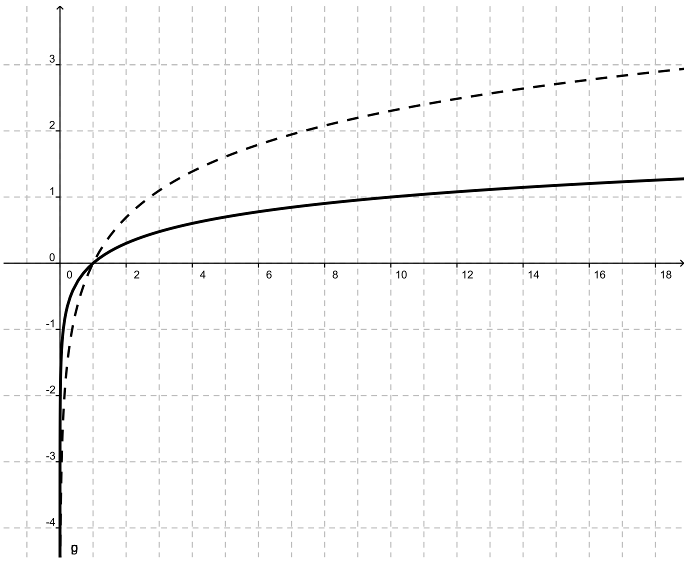
Démonstration

IV Logarithme décimal

Définition

La fonction **logarithme décimal**, noté log, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$


3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
g