Terminale - DS du 17 septembre

2024-2025

Correction de l'exercice 1

Partie A :

1. D'une part : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^+} x+1 = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0} \ln X = -\infty \end{cases}$ donc par composition $\lim\limits_{x \to -1} 4\ln(x+1) = -\infty$

   D'autre part, $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{-x^2}{25} = -\dfrac{1}{25}$

   donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty}$

2. f est dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

   On a pour tou $x \in]-1\ ;\ +\infty[$, $f(x) = 4\ln(u(x)) - v(x)$ avec :

   $u(x) = x+1$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{25}$.

   On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{2x}{25}$

   Or $f'(x) = 4\dfrac{u'(x)}{u(x)} - v'(x)$ donc :

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 4\frac{1}{x+1} - \frac{2x}{25} \\ &= \frac{4 \times 25 - (x+1)2x}{25(x+1)} \\ &\boxed{= \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}} \end{aligned}$$

3. Pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1; +\infty[$, on a :

   $f'(x) = \dfrac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$

   $25(x+1) > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $100 - 2x - 2x^2$, fonction polynôme du second degré donc le coefficient dominant (-2) est négatif.

   $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 100 \times (-2) = 804$

   $\Delta > 0$ donc $100 - 2x - 2x^2 = 0$ admet donc deux solutions sur $\mathbb{R}$:

   $x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{804}}{2(-2)} = \dfrac{-1 + \sqrt{201}}{2} \approx 6,6$

   et $x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{804}}{2(-2)} = \dfrac{-1 - \sqrt{201}}{2} \approx -7,6 < -1$

   On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	-1		x_1		$+\infty$
signe de $f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
variations de f	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	

$[2\ ;\ 6,5] \subset]-1\ ;\ x_1[$ donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [2\ ;\ 6,5]}$.

4. $h(2) = f(2) - 2 = 4\ln(2+1) - \dfrac{2^2}{25} - 2$, donc $h(2) \approx 2,23$.
   Sur l'intervalle $[2\ ;\ m]$ la fonction h est strictement croissante, or $h(2) > 0$ donc sur $[2\ ;\ m]$, $h(x) > 0$ et l'équation $h(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.
   Sur l'intervalle $[m\ ;\ 6,5]$, la fonction h est strictement décroissante et continue.
   $h(m) = M$ avec $M \approx 2,265$ donc $h(m) > 0$
   et $h(6,5) = 4\ln(6,5+1) - \dfrac{6,5^2}{25} - 6,5$ donc $h(6,5) \approx -0,13$ et par conséquent $h(6,5) < 0$
   0 est donc une valeur intermédiaire entre $h(m)$ et $h(6,5)$, et par conséquent, d'après le théorème de la bijection, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[m\ ;\ 6,5]$.
   Finalement, $\boxed{\text{l'équation } h(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur l'intervalle } [2\ ;\ 6,5]}$.

5. Avec la calculatrice on obtient $\boxed{6,36 < \alpha < 6,37}$.

Partie B :

1. Pour tout entier naturel n, on pose P_n, la proposition : « $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$. ».
   Initialisation : On a, d'une part : $u_0 = 2$,
   Et, d'autre part : $u_1 = f(u_0) = f(2) \approx 4,23$
   Donc $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6,5$
   Pour $n = 0$, l'affirmation P_0 est vraie.
   Hérédité : Soit n un entier naturel , tel que la proposition P_n est vraie, c'est-à-dire :

   $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$
   Donc $f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(6,5)$ car la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2\ ;\ 6,5]$

   or $f(2) \approx 4,23 > 2$ et $f(6,5) \approx 6,37 < 6,5$
   donc, $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 6,5$
   D'où l'hérédité
   Conclusion : La proposition P_0 est vraie et, elle est héréditaire sur $\mathbb{N}$, donc, pour tout entier naturel n, on a $\boxed{2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5}$.
2. D'après la question précédente, la suite u est croissante et majorée par 6.5, donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge}}$ vers une limite ℓ telle que $2 \leqslant \ell \leqslant 6,5$.
3. La suite u est une suite convergente vers une limite $\ell \in [2; 6,5]$ et de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f fonction continue sur $[2; 6,5]$.
   Donc, d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ ou $h(x) = 0$
   On sait de plus que cette limite appartient à l'intervalle $[2\ ;\ 6,5]$ et que sur cette intervalle l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α on a $\boxed{\text{donc } \ell = \alpha}$.