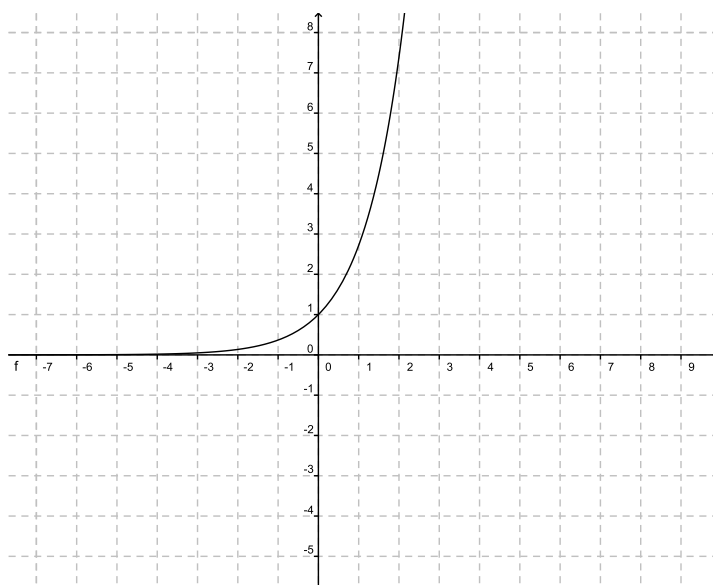


Fonction logarithme

Exercice 1

Approche de la représentation graphique de la fonction $\ln$

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction exponentielle.



1. Faire apparaître sur cette courbe l'antécédent de 3 par la fonction exponentielle. On notera ce nombre $\ln(3)$
2. Tracer la droite d'équation $y = x$ et en déduire la position du point de coordonnées $(3, \ln(3))$.
3. En suivant la même démarche, placer les points suivant : $(2, \ln(2))$, $(4, \ln(4))$, $(5, \ln(5))$, $(6, \ln(6))$, $(7, \ln(7))$, $(1, \ln(1))$
4. Relier les points obtenus par une courbe aussi régulière que possible
5. Que remarque t-on concernant les deux courbes tracées ?

Exercice 2

1. Donner le tableau de variation de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ et tracer cette fonction sur votre calculatrice.
2. Justifier que $e^x = 2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
3. On note $\ln(2)$ cette solution. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $\ln(2)$.
4. Pour quelles valeurs de a peut-on ainsi définir $\ln(a)$?

5. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $\ln(3)$, $\ln(6)$, $\ln(8)$, $\ln(2,71828)$, $\ln(e^2)$, $\ln(e^4)$
6. Conjecturer une relation entre $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(6)$, puis entre $\ln(2)$, $\ln(8)$.

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

1. $e^x = 4$
2. $5e^x + 2 = 8$
3. $e^{2x} - 2 = 0$
4. $e^x - 3 = 2e^x - 1$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes après avoir déterminer l'ensemble de définition.

1. $\ln(x+2) = \ln(2)$
2. $\ln(2x-5) = 1$
3. $4\ln(1-x) = 8$
4. $\ln(3x+8) = \ln(x)$

Exercice 5

Résoudre les équations suivantes après avoir déterminer l'ensemble de définition.

1. $\ln(x^2+1) = \ln(x)$
2. $\ln(3-x) \times \ln(x+1) = 0$
3. $\ln(5x-6) - 2\ln(x) = 0$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(e^x+1) = \ln(2)$
2. $\ln(2e^x+1) = 1$
3. $e^{1+\ln x} = 2x-1$
4. $e^{2\ln x-3} = x$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{x+2} = 3$
2. $4e^{2x-1} = 1$

Exercice 8

Simplifier de tête les expressions suivantes :

1. $\frac{e^{\ln(8)}}{e^{3\ln(2)}}$
2. $\ln(3) + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$
3. $\ln(\sqrt{2} + 1) + \ln(\sqrt{2} - 1)$

Exercice 9

étudier l'ensemble de définition et le signe de chacune des expressions suivantes :

1. $x(\ln(x) - 1)$
2. $\frac{x}{\ln(x) - 1}$
3. $\ln(x)(1 - \ln(x))$
4. $\frac{1 - \ln(x)}{1 + \ln(x)}$

Exercice 10

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(x + 2) \leq 2 \ln(x)$
2. $\ln(x)(\ln(x) - 2) \leq 0$
3. $\ln(x - 13) \geq 2 \ln(x + 3)$
4. $(\ln(x))^2 - \ln(x) - 6 > 0$

Exercice 11

Calculer dans chaque cas la dérivée de la fonction f suivante.

1. $f(x) = x \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$
2. $f(x) = (2x - 3)^6$ sur $\mathbb{R}$
3. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
4. $f(x) = e^{x^2-1}$ sur $\mathbb{R}$
5. $f(x) = (\ln(x))^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$
6. $f(x) = \frac{2x - 3}{e^{-x} + 1}$ sur $\mathbb{R}$
7. $f(x) = 2x^2 - 1 - \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$
8. $f(x) = \sqrt{5x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 12

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 \ln(x) + x$$

1. Déterminer en quel point de la courbe représentative de g , la tangente a pour coefficient directeur 1.
2. Déterminer en quel point de la courbe représentative de g , la tangente passe par l'origine du repère.

Exercice 13

Le plan est muni d'un repère orthonormé

1. Tracer sur une calculatrice les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations respectives $y = \ln(x)$ et $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Etude des tangentes en un point particulier.
 - (a) Déterminer le point d'intersection A de ces deux courbes.
 - (b) On veut montrer que les tangentes en A aux deux courbes sont perpendiculaires.
 - i. Donner les équations des tangentes en A aux deux courbes
 - ii. Donner un vecteur normal à chacune de ces tangentes.
 - iii. Démontrer que ces deux tangentes sont perpendiculaires.
3. Généralisation Soient m un réel strictement positif et $M_1 \in \mathcal{C}_1$ et $M_2 \in \mathcal{C}_2$ deux points d'abscisse respective m et $\frac{1}{m}$. On veut montrer que la tangente en M_1 à $\mathcal{C}_1$ est perpendiculaire à la tangente en M_2 à $\mathcal{C}_2$.
 - (a) Donner les équations des tangentes en M_1 à $\mathcal{C}_1$ et en M_2 à $\mathcal{C}_2$.
 - (b) Donner un vecteur normal à chacune de ces tangentes.
 - (c) Démontrer que ces deux tangentes sont perpendiculaires.

Exercice 14

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - 3X + 2 = 0$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :
 - (a) $(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$
 - (b) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

Exercice 15

Calculer dans chaque cas la dérivée de la fonction f suivante.

1. $f(x) = x \ln(x^2)$ sur $\mathbb{R}^*$
2. $f(x) = (2\ln(x) - 3)^6$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3. $f(x) = \frac{\ln(x) + 1}{2x + 3}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

4. $f(x) = e^{\sqrt{x}} + 1$ sur $\mathbb{R}_+$
5. $f(x) = \ln(2x - 3)$ sur $] \frac{3}{2}, +\infty[$
6. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 16

Croissances comparées

1. On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$.
 (a) Etudier les variations de f sur $[1; +\infty[$ et en déduire que

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad 0 \leq \ln(x) \leq \sqrt{x}$$

- (b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.

3. En effectuant le changement de variable $X = \frac{1}{x}$, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln(x) = 0$.

Exercice 17

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2 \ln x$$

1. Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α , arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction f .
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

5. Etudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = 2x$.

Exercice 18

Partie A : établir une inégalité

Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = x - \ln(x + 1)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $\ln(x + 1) \leq x$.

Partie B : application à l'étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n)$. On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2 .
2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.
(b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 1$.
(c) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que $\ell = f(\ell)$, où f est la fonction définie dans la **partie A**. En déduire la valeur de ℓ .
4. (a) Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p} .
(b) Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15} .

Exercice 19

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; 1]$ par

$$f(x) = x(1 - \ln x)^2.$$

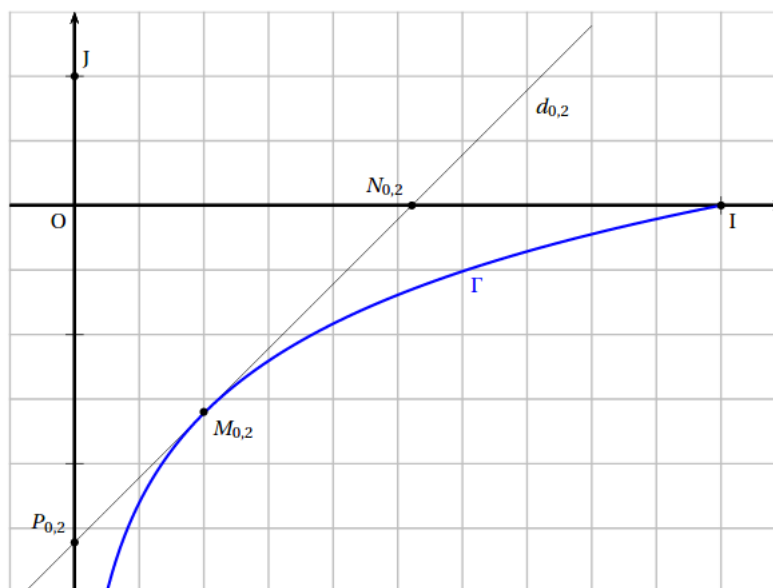
- (a) Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0 ; 1]$, $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.
- (b) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0 ; 1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; 1]$ par $g(x) = \ln x$.

Soit a un réel de l'intervalle $]0 ; 1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a . Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a .

On s'intéresse à l'aire du triangle ON_aP_a quand le réel a varie dans l'intervalle $]0 ; 1]$.

2. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0,2$ et on donne la figure ci-dessous.



- Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.
- Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.
- Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$.

Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0; 1]$, l'aire du triangle ON_aP_a en unités d'aire est donnée par $\mathcal{A}(a) = \frac{1}{2}a(1 - \ln a)^2$.

- À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathcal{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

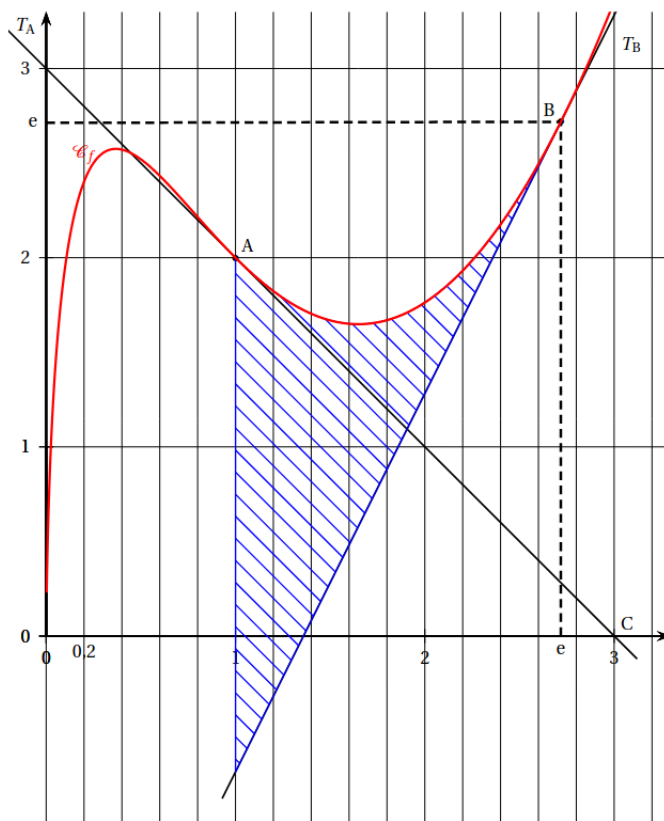
Exercice 20

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f , notée $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $]0; 3]$;
- la droite T_A , tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(1; 2)$;
- la droite T_B tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $B(e; e)$.

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point $C(3; 0)$.



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0; 3[$?
3. Quel est le signe de $f''(0, 2)$?

Partie B : étude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2]$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
En déduire que $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.
On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.
3. On admet que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.
(a) Montrer que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{1}{x}(4 \ln x + 1)$.

- (b) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.
- (c) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - e$.